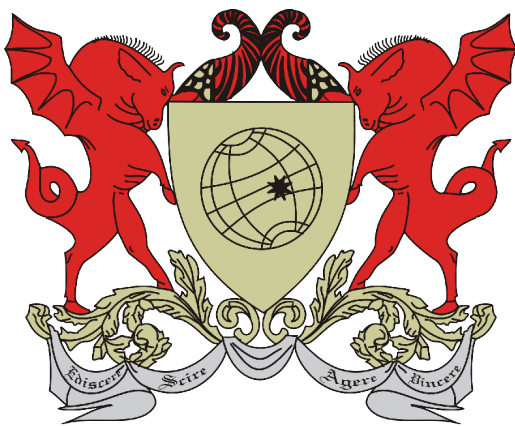


CÁLCULO II

ADY CAMBRAIA JUNIOR
BRAZ MOURA FREITAS



Universidade Federal de Viçosa

Reitora

Nilda de Fátima Ferreira Soares

Vice-Reitor

Demetrius David da Silva



Coordenadoria de
Educação Aberta e a Distância

Diretor

Frederico Vieira Passos

Campus Universitário, 36570-000, Viçosa/MG
Telefone: (31) 3899 2858 | Fax: (31) 3899 3352

Autor: Ady Cambraia Junior e Braz Moura Freitas

Layout: Diogo Rodrigues

Diagramação: Lucas Kato

Coordenação Editorial e CopyDesk: João Batista Mota

Março de 2013

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e
Classificação da Biblioteca Central da UFV**

C177c Cambraia Junior, Ady, 1981-
2013 Cálculo II [recurso eletrônico] / Ady Cambraia Junior, Braz Moura
Freitas. - Viçosa, MG : Ed. UFV, 2013.
2,8MB : il. color. ; ePUB. - (Conhecimento, ISSN 2179-1732 ; n. 27)

Inclui índice
Referência: p. 83

1. Cálculo. 2. Regra de L'Hôpital. 3. Integrais impróprias.
4. Sequências infinitas. 5. Séries infinitas. 6. Séries de potência.
I. Freitas, Braz Moura, 1949-. II. Título

CDD 22. ed. 515

Sumário

1	Introdução	3
2	Integrais Impróprias e a Regra de L'Hôpital	5
2.1	Regra de L'Hôpital	5
2.2	Outras formas indeterminadas	9
2.2.1	A forma indeterminada $\infty \cdot 0$	9
2.2.2	A forma indeterminada $\infty - \infty$	10
2.2.3	Potências Indeterminadas: $1^\infty, \infty^0, 0^0$	11
2.3	Integrais Impróprias	13
2.3.1	Limite de Integração Infinito	13
2.3.2	Imagem de f infinita, ou seja, integrando descontínuo	15
2.3.3	Aplicações das Integrais Impróprias	19
2.4	Exercícios	20
3	Sequências	23
3.1	Sequências de números	23
3.1.1	Limite de sequências	25
3.1.2	Subsequências	32
3.2	Uma sequência especial: A Sequência de Fibonacci	34
4	Séries Infinitas	39
4.1	Série Geométrica	41
4.2	CrITÉrio do Termo Geral	44
4.3	Séries Telescópicas	45
4.4	Outros Teoremas sobre Convergência de Séries	45
4.4.1	Séries de Termos Positivos	49
4.5	Teste da Integral	52
4.6	Séries Alternadas	55
4.7	Convergência absoluta, Teste da Razão, Teste da Raiz	58
5	Séries de Potências	67
5.1	Propriedades de Séries de Potências	70
5.2	Séries de Taylor	76
5.2.1	Aplicações das Séries de Potências - Série Binomial	81

Introdução

Esta apostila surgiu por meio de uma revisão de outra apostila originalmente escrita para o curso de cálculo 2, semipresencial, do projeto das NTICs. Essa revisão foi feita visando à finalidade de atender uma das exigências da disciplina cálculo 2 a distância. Ela foi dividida em seis capítulos. O primeiro refere-se a uma revisão de formas indeterminadas e integrais impróprias assuntos estes fundamentais para o estudo de séries e equações diferenciais. Neste capítulo, os principais resultados referem-se à Regra de L'Hôpital e o estudo de convergência de integrais impróprias.

Espera-se que, ao final do estudo deste capítulo, o aluno seja capaz de usar com desenvoltura a Regra de L'Hôpital e analisar corretamente a convergência de uma integral imprópria.

No capítulo dois, estudamos as sequências numéricas infinitas, que são, a base para o estudo posterior de séries infinitas. Neste capítulo, veremos a importante definição de convergência de uma sequência e alguns teoremas importantes relacionados a este assunto, dentre eles, destaca-se o teorema da convergência monótona.

No capítulo subsequente, iniciamos o estudo de séries numéricas infinitas. Veremos aqui com mais ênfase o estudo das séries numéricas convergentes e estudaremos vários critérios ou testes de convergência, sendo que dentre os mais importantes destacam-se os testes da raiz e da razão.

São as séries convergentes, em especial as séries de potências convergentes, que têm interesse pois é por meio delas que é possível estudar importantes funções e suas aplicações dentro da matemática e também em outros ramos do conhecimento. O estudo das séries de potências é o assunto que será visto no capítulo quatro, em especial as séries de Maclaurin e de Taylor de uma função f .

Em seguida, no capítulo cinco, faremos um estudo sucinto de equações diferenciais ordinárias de 1ª e 2ª ordens. Neste capítulo, daremos mais ênfase ao estudo de equações lineares de 1ª e 2ª ordens, em especial as EDO's de 2ª ordem lineares, homogêneas e não-homogêneas, de coeficientes constantes. Veremos também algumas equações não lineares de 1ª ordem, tais como: equações separáveis, equações homogêneas e de Bernoulli. E, para cada uma delas, veremos o método de solução mais usual.

Finalizaremos o curso com o estudo de uma poderosa técnica para resolução de edo's com valores iniciais. Tal técnica é conhecida como Transformada de Laplace, que usa

o conceito de operador (integral) linear e seu inverso para resolver EDO's com valores iniciais.

Integrais Impróprias e a Regra de L'Hôpital

Em um primeiro curso de cálculo, quando se estuda a integral definida de uma função f , esta função está condicionada a duas exigências fundamentais:

- o intervalo de integração $[a, b]$ é finito.
- a função f tem que ser contínua em $[a, b]$.

Seja f uma função cujo domínio é um subconjunto infinito dos números reais. Um questionamento natural é:

- 1) É possível estender o conceito de integral para situações em que o intervalo de integração é infinito ou que a função seja descontínua no intervalo $[a, b]$?
- 2) É possível determinar áreas ou volumes de regiões não limitadas?

Visando responder a estas questões vamos definir o que é uma integral imprópria e veremos que a resposta para esses questionamentos é positiva em alguns casos, e em outros não.

Ao desenvolvermos tal teoria veremos que a noção de limite desempenha papel fundamental. Por isso, vamos utilizar o que aprendemos anteriormente para estudar casos especiais de limites, que chamaremos de formas indeterminadas, que serão usadas, dentre outras situações, no estudo da Integral Imprópria.

2.1 Regra de L'Hôpital

Em nossos estudos anteriores de limites, desenvolvemos diversos artifícios algébricos e trigonométricos para encontrar o valor do limite, como:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 4} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-4)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-4} = -\frac{2}{3}. \quad (2.1)$$

Isto, em geral, ocorre quando calculamos o limite de um quociente da forma $\frac{f(x)}{g(x)}$ com $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Tal expressão é chamada de **forma indeterminada** do tipo $\frac{0}{0}$ em $x = a$. Se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ a expressão $\frac{0}{0}$ é uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ para $x \rightarrow \pm\infty$. Outro tipo de forma indeterminada ocorre quando $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ para $x \rightarrow a$ ou $x \rightarrow \pm\infty$ que é indicada apenas como $\frac{\infty}{\infty}$.

Existem casos onde ocorre a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ e a manipulação algébrica usada no exemplo 2.1 não é tão simples de ser aplicada.

Um primeiro exemplo não tão simples ocorre no limite fundamental:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (x \text{ em radianos}).$$

Pode-se provar geometricamente este limite, mas para uma forma $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, quando f e g são funções quaisquer, a determinação de tais limites requer o uso de um teorema conhecido como **Regra de L'Hôpital**.

A Regra de L'Hôpital foi publicada em 1696 (em plena época das grandes descobertas do Cálculo) pelo matemático francês Marquês Guillaume François Antoine de L'Hôpital. No entanto, este teorema já era conhecido pelo matemático suíço John Bernoulli do qual L'Hôpital foi aluno.

Existem várias demonstrações da regra de L'Hôpital. A demonstração mais usual da regra faz uso do Teorema do Valor Médio de Cauchy, também conhecido por Teorema do Valor Médio Generalizado, cujo enunciado é:

Teorema 2.1 do Valor Médio de Cauchy *Sejam f, g funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b) . Se $g(x) \neq 0$, para todo $x \in (a, b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Demonstração: Em primeiro lugar vamos mostrar que $g(b) - g(a) \neq 0$. Suponha, por absurdo, que $g(b) - g(a) = 0$, isto é, $g(b) = g(a)$. Então como g é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) , pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$, o que contradiz a hipótese $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, logo $g(a) \neq g(b)$. Considere a função

$$F(x) = f(x) - f(a) - (g(x) - g(a)) \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right).$$

Afirmção: A função F satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle. De fato,

- F é contínua em $[a, b]$, pois f e g o são;

- F é derivável em (a, b) , pois F é diferença de funções deriváveis e $F'(x) = f'(x) - g'(x) \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right)$;
- $F(a) = F(b) = 0$.

Logo, novamente pelo Teorema de Rolle, existe um $c \in (a, b)$ tal que

$$F'(c) = f'(c) - g'(c) \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right) = 0,$$

isto é,

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

□

Com este resultado estabelecido temos condições de enunciar e demonstrar a Regra de L'Hôpital.

Teorema 2.2 (Regra de L'Hôpital) *Sejam f e g funções definidas em $I = [a, b]$ que contém c e que são deriváveis em (a, b) , exceto possivelmente em c . Se $\frac{f(x)}{g(x)}$ tem a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ em $x = c$ e se $g'(x) \neq 0$ para $x \neq c$, então*

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

desde que $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ exista.

Demonstração: Sejam f e g funções contínuas no intervalo $[a, b]$ e deriváveis no intervalo aberto (a, b) , com $c \in (a, b)$. Suponha que $\frac{f(x)}{g(x)}$ tem a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ em $x = c$ e que $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$. Devemos mostrar que $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Vejamos então que para $x \rightarrow c^+$ isto ocorre (para $x \rightarrow c^-$ é análogo). De fato, temos que f e g são contínuas no intervalo $[c, x]$ e deriváveis em (c, x) e $g'(t) \neq 0$, para todo $t \in (c, x)$, então pelo Teorema 2.1 existe $d \in (c, x)$ tal que

$$\frac{f'(d)}{g'(d)} = \frac{f(c) - f(x)}{g(c) - g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Assim, como $d \in (c, x)$, segue que quando $x \rightarrow c^+$ temos que $d \rightarrow c^+$, logo:

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{d \rightarrow c^+} \frac{f'(d)}{g'(d)} = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Analogamente, prova-se que $\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

Este resultado também é válido quando $x \rightarrow \pm\infty$, $x \rightarrow c^+$ ou $x \rightarrow c^-$. A regra de L'Hôpital também é válida para a segunda forma indeterminada, $\frac{\infty}{\infty}$, no entanto, sua demonstração é bem mais complexa e não a faremos. É importante ressaltar que a Regra de L'Hôpital é usada somente quando ocorrem formas indeterminadas:

$$\frac{0}{0} \text{ e } \frac{\infty}{\infty}.$$

Existem outras formas indeterminadas, que veremos posteriormente, e, quando ocorrerem, serão convertidas para um dos dois casos citados. Outra observação importante é que na regra de L'Hôpital as derivadas de f e g são tomadas separadamente, isto é, temos um quociente entre as derivadas de f e g , ou seja, $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ e não a derivada do quociente de f e g .

Exemplo 2.3

Podemos aplicar a Regra de L'Hôpital nos seguintes casos:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos x^2}{1} = \frac{0}{1} = 0$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - e^x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-e^x} = \frac{1}{-1} = -1.$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4}{8^x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{8^x \ln 8} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{8^x (\ln 8)^2} = 0$

Exercícios 2.4

1. Resolva as seguintes questões que envolvem a forma básica do uso da Regra de L'Hôpital:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{\operatorname{tg} x - x}$

iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x}{e^x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - x - 7}$

v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\ln(2e^x - 1)}$

vi) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{1}{x} \right)}$

vii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x^2}$

2. Calcule um valor de c que faça com que a função $f(x) = \begin{cases} \frac{9x - 3\operatorname{sen} 3x}{5x^3} & \text{se, } x \neq 0 \\ c & \text{se, } x = 0 \end{cases}$ seja contínua em $x = 0$.

3. Sejam $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se, } x \neq 0 \\ 0 & \text{se, } x = 0 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se, } x \neq 0 \\ 0 & \text{se, } x = 0 \end{cases}$. Mostre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1, \quad \text{mas} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 2.$$

Por que isso não contradiz a Regra de L'Hôpital?

4. Ache os valores para a e b tais que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x + ax + bx^3}{x^3} = 0$.

2.2 Outras formas indeterminadas

Existem outras formas indeterminadas, a saber: $\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$, 1^∞ , ∞^0 , 0^0 . As formas 1^∞ , ∞^0 , 0^0 são chamadas de potências indeterminadas e têm origem em limites de uma função composta $h(x) = f(x)^{g(x)}$. O procedimento usado para resolver tais indeterminações é transformá-las em outra do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ e a partir daí usar a forma de L'Hôpital correspondente. Analisemos então como proceder em cada caso.

2.2.1 A forma indeterminada $\infty \cdot 0$

Suponha que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ e que $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x), \quad (\infty \cdot 0). \quad (2.2)$$

Neste caso, podemos considerar $f(x)g(x)$ como $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \left(\text{resp. } \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \right)$ e o limite (2.2) torna-se:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{0}{0} \quad \left(\text{resp. } \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\infty}{\infty} \right). \quad (2.3)$$

Assim, o limite (2.3) se enquadra na primeira forma indeterminada e podemos aplicar a Regra de L'Hôpital. O procedimento para $x \rightarrow c$ é também usado para $x \rightarrow \pm\infty$.

Se considerarmos $f \cdot g$ como $\frac{f}{\frac{1}{g}}$, podemos proceder de forma análoga ao caso anterior,

no entanto, iremos obter um limite com a segunda forma indeterminada, $\frac{\infty}{\infty}$.

Os exemplos a seguir caracterizam bem este procedimento.

Exemplo 2.5

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x} \stackrel{\infty \cdot 0}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\cos \frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x} = \cos 0 = 1$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cdot \ln x \stackrel{0 \cdot (-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{2x^{\frac{3}{2}}}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} -2x^{\frac{1}{2}} = 0$$

2.2.2 A forma indeterminada $\infty - \infty$

Quando $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ dizemos que a diferença $f(x) - g(x)$ está associada à indeterminação $\infty - \infty$ em a . Podemos transformar esta indeterminação na forma indeterminada $\frac{0}{0}$ efetuando o mínimo múltiplo comum, caso as funções sejam racionais, ou escrevendo:

$$f(x) - g(x) = f(x)g(x) \left[\frac{f(x)}{f(x)g(x)} - \frac{g(x)}{f(x)g(x)} \right] = f(x)g(x) \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right].$$

Exemplo 2.6

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{e^x + xe^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{2e^x + xe^x} = -\frac{1}{2}$$

2.2.3 Potências Indeterminadas: $1^\infty, \infty^0, 0^0$

Seja h uma função definida por: $h(x) = f(x)^{g(x)}$, onde f e g são duas funções, sendo $f(x) > 0$, para todo x no domínio de f . As expressões $1^\infty, \infty^0$ e 0^0 também são formas indeterminadas. Em qualquer um desses casos, para resolver estas indeterminações, procederemos da seguinte forma:

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x) \ln(f(x))}.$$

Como a função e^x é contínua para todo x real, temos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^L,$$

sendo $L = \lim_{x \rightarrow a} [g(x) \ln(f(x))]$.

Observe que $\lim_{x \rightarrow a} [g(x) \ln(f(x))]$ está associado à forma indeterminada $\infty \cdot 0$.

Exemplo 2.7

Mostre que

$$\text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\text{ii)} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$$

Solução:

i) Seja $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ e observe que como $x \rightarrow 0^+$, então $x+1 > 0 \Rightarrow f(x) > 0$, $\forall x > 0$. Aplicando o logaritmo, obtemos:

$$\ln f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x),$$

que é uma forma indeterminada do tipo $0 \cdot \infty$. Usando L'Hôpital e calculando o limite do logaritmo acima, obtemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x} = 1.$$

Daí, utilizando a continuidade da função $\ln x$, segue que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln f(x) = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right] = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e$$

ii) Seja $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$. Como $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$, então $x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}(x) > 0$. Aplicando o logaritmo obtemos que: $\ln f(x) = \cos x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)$. A expressão $\cos x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)$ é uma

forma indeterminada do tipo $0 \cdot \infty$. Daí, usando a Regra de L'Hôpital, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} [\cos x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\sec x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{(\sec x)^2}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec x}{(\operatorname{tg} x)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{(\operatorname{sen} x)^2} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = e^0 = 1 \end{aligned}$$

Exercícios 2.8 1. Calcule os limites:

$$\begin{array}{llll} (a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x} & (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{e^x - x - 1} & (c) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x & (d) \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x} \\ (e) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x} & (f) \lim_{x \rightarrow 1^+} x^{1/(1-x)} & (g) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^x & (h) \lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{tg} \frac{1}{x} \end{array}$$

2. Dê exemplos de duas funções deriváveis $f(x)$ e $g(x)$ com $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ que satisfaçam as seguintes condições:

$$\begin{array}{ll} (a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 4 & \\ (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty & \\ (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 & \end{array}$$

3. Calcule um valor de c que faça com que a função $f(x) = \begin{cases} \frac{9x - 3\operatorname{sen}(3x)}{5x^3}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$ seja contínua em $x = 0$.

4. Sejam $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1$, mas $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$. Por que isso não contradiz a Regra de L'Hôpital?

5. Numa progressão geométrica, se a for o primeiro termo, r for a razão comum a dois termos sucessivos e S for a soma dos n primeiros termos, então se $r \neq 1$, $S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$. Ache o $\lim_{n \rightarrow \infty} S$. Se $r = 1$ o resultado será consistente com a soma dos n primeiros termos?

6. Se $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{nx+1}{nx-1} \right)^x = 9$, ache n .

7. Se $f(x) = \begin{cases} (1 - e^{4x}) & \text{se } x < 0 \\ k & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, ache k de forma que f seja contínua em $x = 0$.

2.3 Integrais Impróprias

No curso de cálculo I trabalhamos com integrais onde o domínio de integração era finito e a função era contínua no intervalo. Além disso, a imagem do integrando era finita. Estenderemos agora o conceito de integral definida para os casos onde o intervalo de integração é infinito e também para os casos onde a função f tem descontinuidades infinitas neste intervalo.

Uma das aplicações mais simples das integrais impróprias pode ser vista, por exemplo, para encontrar o comprimento de uma circunferência. Inicialmente considere a circunferência centrada em zero e com raio $r > 0$, isto é, $y^2 + x^2 = r^2$. O semicírculo superior é dado por $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leq x \leq r$. Quando calculamos a integral de zero a r obtemos a medida de um quarto do comprimento da circunferência.

Seja C o comprimento total da circunferência. Então:

$$C = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx = 4 \cdot r \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Observe que temos uma descontinuidade com imagem infinita nessa integral no caso em que $r = x$. Para resolver este impasse devemos recorrer aos recursos de limite. Logo:

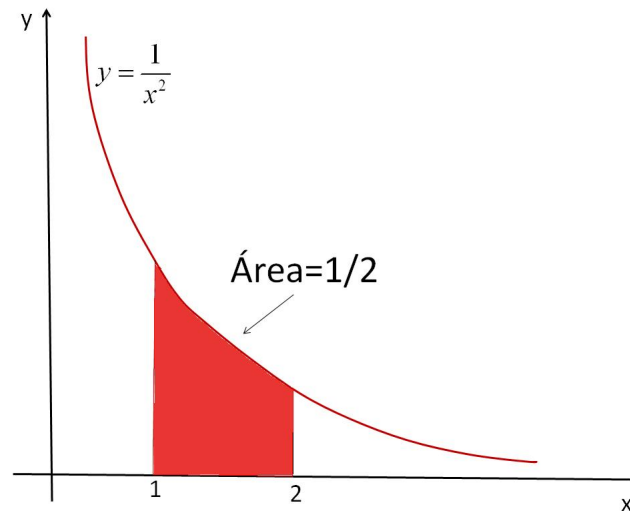
$$\begin{aligned} C &= 4 \cdot r \lim_{b \rightarrow r} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 4 \cdot r \lim_{b \rightarrow r} \left[\arcsin \left(\frac{x}{r} \right) \right]_0^b = \\ &= 4 \cdot r \lim_{b \rightarrow r} \left[\arcsin \left(\frac{b}{r} \right) - \arcsin 0 \right] = 4 \cdot r (\arcsin 1 - \arcsin 0) \\ &= 4 \cdot r \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = 4 \cdot r \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Daí, o comprimento da circunferência é: $C = 4r \frac{\pi}{2} = 2\pi r$. Integrais onde o domínio de integração é infinito ou com imagem de f infinita são, como no exemplo, chamadas de integrais impróprias.

2.3.1 Limite de Integração Infinito

Primeiramente, para motivar a definição de limite de integração infinito, considere o problema de calcular a área da superfície situada abaixo do gráfico da função $y = \frac{1}{x^2}$, acima do eixo das abscissas e à direita da reta $x = 1$ (perceba que esta região se estende infinitamente à medida que os valores de x crescem). Normalmente, a intuição nos leva a imaginar erroneamente que essa área é infinita. Desta forma, vamos num primeiro momento, calcular a área hachurada da figura a seguir, isto é, a área dada pela integral

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = \left[-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{1} \right) \right] = \frac{1}{2}$$



Analogamente, se quisermos calcular a área até a reta $x = 3$, obteremos:

$$\int_1^3 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^3 = \left[-\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{1} \right) \right] = \frac{2}{3}.$$

Se quisermos calcular a área até a reta $x = 4$, obteremos:

$$\int_1^4 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^4 = \left[-\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{1} \right) \right] = \frac{3}{4}.$$

Prosseguindo desta forma, percebemos que se limitarmos essa área pela reta $x = t$, e aumentarmos cada vez mais o valor de t , isto é, fazendo $t \rightarrow \infty$, a área da região se aproxima cada vez mais de 1.

a) Seja f seja contínua em $[a, +\infty)$, onde $a \in \mathbb{R}$. Definimos:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x)dx,$$

se o limite existir.

b) Seja f contínua em $(-\infty, a]$. Definimos:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x)dx,$$

se o limite existir.

Dizemos que as integrais convergem se os limites existirem, caso contrário diremos que as integrais divergem.

c) Seja f contínua em $(-\infty, \infty)$ e a um número real qualquer. Definimos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

A integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ será convergente se as duas integrais do lado direito da igualdade também o forem. No caso de uma delas ser divergente, então $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ também irá divergir. Pode-se mostrar que a escolha do número **a** no item c é arbitrária. Por questão de simplicidade, em geral, escolhemos **a=0**.

Exemplo 2.9 *Determine se são ou não convergentes as integrais abaixo:*

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

$$2. \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$3. \int_{-\infty}^0 e^x dx$$

Solução:

$$\bullet \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{t} + 1 \right) = 1$$

$$\begin{aligned} \bullet \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \cdot \ln x \Big|_1^t + \int_1^t \frac{1}{x^2} dx \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{t} \cdot \ln t + 0 - \frac{1}{x} \Big|_1^t \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{t} \cdot \ln t - \frac{1}{t} + 1 \right) = 1 - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 1 \end{aligned}$$

$$\bullet \int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 e^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} (e^x) \Big|_t^0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} (e^0 - e^t) = 1$$

□

2.3.2 Imagem de f infinita, ou seja, integrando descontínuo

Se f for uma função contínua em um intervalo fechado $[a,b]$, então $\int_a^b f(x)dx$ existe. Se a função f tem uma descontinuidade com imagem infinita em algum ponto do intervalo $[a,b]$, temos três casos a considerar:

1. f é contínua em $[a, b)$ e $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$. Neste caso, definimos:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx,$$

Se o limite existir dizemos que a integral converge, caso contrário ela diverge.

2. f é contínua em $(a, b]$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$. Neste caso, definimos:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx.$$

Se o limite existir dizemos que a integral converge, caso contrário ela diverge.

3. f é contínua em $[a, c) \cup (c, b]$, $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty$. Neste caso, definimos:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow c^-} \left(\int_a^t f(x)dx \right) + \lim_{t \rightarrow c^+} \left(\int_t^b f(x)dx \right).$$

Dizemos que a integral $\int_a^b f(x)dx$ converge se cada uma das integrais, $\int_a^c f(x)dx$ e $\int_c^b f(x)dx$, for convergente. Por outro lado, se uma das integrais diverge, então a integral $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

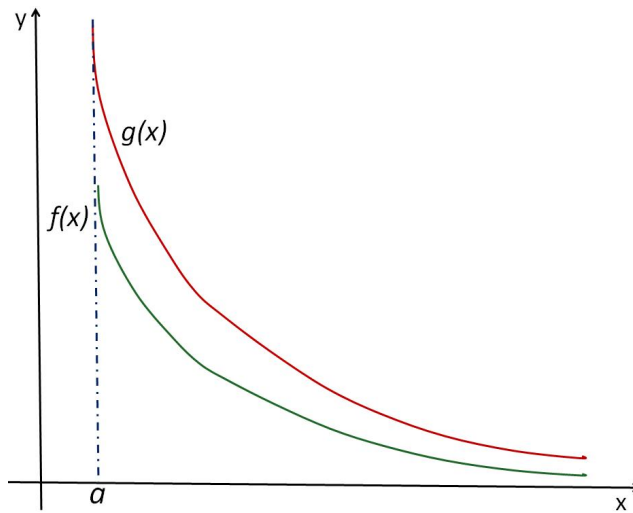
Em muitos casos não queremos (ou não podemos) saber qual é o valor de uma integral imprópria, mas apenas saber se tal integral imprópria é convergente ou divergente. Para isso existem diversos critérios que nos permitem avaliar a convergência da integral. Dentre os mais utilizados destacamos:

Teorema 2.10 (Teste da Comparação) *Sejam f , e g duas funções integráveis em $[a, t]$, para todo $t > a$, tais que, para todo $x \geq a$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Então:*

(a) *Se $\int_0^\infty g(x)dx$ é convergente, então $\int_0^\infty f(x)dx$ também é convergente.*

(b) *Se $\int_0^\infty f(x)dx$ é divergente, então $\int_0^\infty g(x)dx$ também é divergente.*

Este resultado é bastante intuitivo ao observarmos a figura:



Exemplo 2.11 Estude a convergência da integral $\int_4^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{(x-2)^2} dx$.

Solução: Note que esta integral é constituída por um quociente, sendo o numerador uma função limitada e o denominador uma função polinomial. Por isso, vamos usar o Teste da Comparação para analisar se ela converge ou não. Quando usamos esse teste, a dificuldade principal é encontrar a função ideal para que seja feita a comparação. A função g , neste caso, pode ser escolhida como sendo $g(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$.

Agora observe que:

- A função seno satisfaz a desigualdade: $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, em particular, para todo $x \geq 4$.
- $g(x) = \frac{1}{(x-2)^2} > 0, \forall x \geq 4$
- $\int_4^{\infty} \frac{1}{(x-2)^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_4^t \frac{1}{(x-2)^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left. \frac{-1}{x-2} \right|_4^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{t-2} \right) + \frac{1}{4-2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Sendo assim, as hipóteses do Teorema da Comparação são satisfeitas para todo $x \geq 4$ e podemos garantir que $\int_4^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{(x-2)^2} dx$ converge, uma vez que a integral $\int_4^{\infty} \frac{1}{(x-2)^2} dx$ converge. $\square$

Com uma pequena extensão do Teorema da Comparação, conseguimos obter mais um critério de convergência (ou divergência) de integrais impróprias.

Teorema 2.12 Seja $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ converge, então $\int_a^{\infty} f(x) dx$ também converge.

Vejamos como aplicar o critério do teorema 2.12 com o seguinte exemplo:

Exemplo 2.13 Mostre que a $\int_{\pi}^{\infty} e^{-x} \sin x dx$ converge.

Solução: Para usarmos o Teorema da Comparação, temos que verificar se o integrando satisfaz as hipóteses do teorema. Constatamos que a função $f(x) = e^{-x} \sin x$ não é positiva $\forall x$. No entanto, $0 \leq |\sin x| \leq 1$, consequentemente $0 \leq |e^{-x} \sin x| = e^{-x} |\sin x| \leq e^{-x}$. Como $\int_{\pi}^{\infty} e^{-x} dx$ converge, o Teste da Comparação nos garante que $\int_{\pi}^{\infty} |e^{-x} \sin x| dx$ também converge. Aplicando agora o teorema 2.12 concluímos que $\int_{\pi}^{\infty} e^{-x} \sin x dx$ também converge. $\square$

O critério apresentado a seguir é particularmente apropriado para analisar a convergência de integrais impróprias cujo integrando é um quociente de polinômios.

Teorema 2.14 Sejam f e g duas funções contínuas em $[a, \infty)$, tais que $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$, com

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L,$$

sendo $L \in (0, \infty)$. Então as integrais impróprias $\int_a^{\infty} f(x) dx$ e $\int_a^{\infty} g(x) dx$ comportam-se da mesma maneira, isto é, ou ambas convergem ou ambas divergem.

Exemplo 2.15 Estude a convergência da integral $\int_5^{\infty} \frac{x}{2x^3 + 3x + 1} dx$. Seja g a função definida por $g(x) = \frac{x}{2x^3 + 3x + 1}$.

Solução: Observe que:

$$\bullet \quad g(x) = \frac{x}{2x^3 + 3x + 1} = \frac{x}{x^3 \cdot \left(2 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)} = \frac{1}{x^2 \cdot \left(2 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}, \forall x \geq 5$$

- Para x suficientemente grande o comportamento da função g é semelhante ao da função f definida por $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \geq 5$.

$$\bullet \quad \int_5^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \int_5^{\infty} x^{-2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_5^b x^{-2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{-1}{x} \right|_5^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-1}{b} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

A integral $\int_5^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ é convergente; vejamos se ela satisfaz as hipóteses do teorema

2.14. Como $g(x) = \frac{x}{2x^3 + 3x + 1}$ e $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Observe que para $x \geq 5$, $f(x) > 0$ e

$g(x) > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2x^3 + 3x + 1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^3 + 3x + 1} = \frac{1}{2} > 0.$$

Com as hipóteses do teorema 2.14 satisfeitas, e como a integral $\int_5^\infty f(x)dx$ converge, podemos concluir que $\int_5^\infty \frac{x}{2x^3 + 3x + 1} dx$ converge. □

2.3.3 Aplicações das Integrais Impróprias

O cálculo desempenha um papel importante em diversas áreas das Ciências Exatas, Agrárias, Economia e outras. Em particular, as Integrais Impróprias têm suas aplicações. Vejamos a seguir algumas dessas aplicações.

Exemplo 2.16 Aplicação na Economia

Suponha que exista um fluxo contínuo de receita para o qual o juro é acumulado continuamente à taxa de 100i por cento e $f(t)$ reais é a receita por ano, em qualquer tempo de t anos. Se a receita continuar indefinidamente, o valor anual, V em reais, de toda receita futura é dado pela seguinte integral imprópria:

$$V = \int_0^\infty f(t)e^{-it} dt.$$

Exemplo 2.17 Aplicação na Teoria da Probabilidade

Uma função densidade de probabilidade é uma função f cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e que satisfaz às condições:

1. $f(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$

2. $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = 1$

Vamos considerar aqui a função densidade exponencial definida por

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-kx} & \text{se, } x \geq 0 \\ 0 & \text{se, } x < 0 \end{cases}$$

onde $k > 0$. Para verificar se essa função qualifica-se como uma função densidade de probabilidade, vejamos se ela satisfaz as duas propriedades acima referidas.

1. Se $x < 0$, $f(x) = 0$; se $x \geq 0$, $f(x) = ke^{-kx}$ e como $k > 0$ então, $ke^{-kx} > 0$.

2.

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{\infty} f(x)dx \\
 &= \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^{\infty} ke^{-kx}dx \\
 &= 0 + \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\int_0^b e^{-kx}(-kdx) \right] \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-kx}]_0^b \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-kb} + 1) = 1
 \end{aligned}$$

Se f for a função de densidade de probabilidade de ocorrência de determinado evento, então a probabilidade de que o evento irá ocorrer no intervalo fechado $[a, b]$ é denotada por $P([a, b])$ e definida por:

$$P([a, b]) = \int_a^b f(x)dx.$$

Por exemplo, para determinado tipo de bateria elétrica, a função densidade de probabilidade de que x horas seja o tempo de vida útil de uma bateria escolhida ao acaso é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{60}e^{-\frac{x}{60}} & \text{se, } x \geq 0 \\ 0 & \text{se, } x < 0 \end{cases}$$

A probabilidade de que o tempo de vida de uma bateria escolhida ao acaso seja pelo menos 50 horas é:

$$\begin{aligned}
 P([50, \infty)) &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{50}^b \frac{1}{60}e^{-\frac{x}{60}}dx \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-\frac{x}{60}}]_{50}^b \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-\frac{b}{60}} + e^{-\frac{50}{60}}) \\
 &= 0 + e^{-0,833} = 0,435.
 \end{aligned}$$

A fim de compreender melhor o conteúdo apresentado, sugerimos que faça os seguintes exercícios.

2.4 Exercícios

1. Decida se a integral é convergente ou divergente:

(a) $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{|x|}}dx$

(b) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(1-x)^2}dx$

(c) $\int_0^2 \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx$

(e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 3} dx$

(f) $\int_0^{\infty} \sin x dx$

(g) $\int_0^1 x \ln x dx$

(h) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$

(i) $\int_0^4 \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx$

(j) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$

(k) $\int_0^2 \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$

(l) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x + x^3}} dx$

2. Calcule, se existir, a área das regiões apresentadas a seguir, limitadas pelas curvas y e pelos intervalos indicados:

(a) $y = \frac{1}{(x-1)^2}$, de $0 \leq x < 1$

(b) $y = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$, de $0 \leq x < 3$

(c) $y = \frac{1}{x}$, de $0 < x \leq 1$

(d) $y = \sec^2 x$, de $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$

(e) $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, de $-2 < x \leq 0$

(f) $y = \frac{1}{(x+1)^{2/3}}$, de $-2 \leq x \leq 7$

(g) $y = \frac{1}{(x-3)^2}$, de $0 \leq x < 4$

(h) $y = \frac{x-2}{x^2-5x+4}$, de $2 \leq x < 4$

(i) $y = \frac{1}{x^2-x-2}$, de $0 \leq x \leq 4$

(j) $y = \frac{1}{1-\cos x}$, de $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$

(k) $y = x^{-4/3}$, de $-1 \leq x \leq 1$

3. Calcule as seguintes integrais:

(a) $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$,

(b) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$

(c) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

(d) $\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin t dt$

(e) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx$

(f) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^5} dx$

(g) $\int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx$

(h) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^2} dx$

4. Para quais valores de p a integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ converge? Quando ela converge, qual é o seu valor?

Capítulo 3

Sequências

3.1 Sequências de números

Em nosso cotidiano estamos habituados a considerar diversos acontecimentos que ocorrem numa determinada ordem, que pode ser cronológica, ou de tamanho, dentre outras. Em matemática, uma sequência relaciona números que seguem determinada ordem, e que esta ordem é definida a partir de uma lei (função). Veremos que cada sequência tem propriedades particulares e a partir do conhecimento dessas propriedades podemos entender melhor o comportamento (tendência) de cada sequência.

Definição 3.1 *Uma sequência de números é uma correspondência, ou função f , que a cada número natural n associa um único número real a_n .*

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n \\ 1 & \mapsto & a_1 \\ 2 & \mapsto & a_2 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Por essa definição acima, uma sequência é uma **função** f definida no conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, e cujas imagens são números reais. Esta função é, algumas vezes, chamada **função posição**, por nos fornecer o elemento da posição n da sequência (a_n) , ou seja, $f(n) = a_n$.

Notação: Denotamos as sequências por $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n)_{n \geq 1}$, ou simplesmente, $a_1, a_2, \dots, a_n \dots$.

Observação 3.2

- (i) Chamamos a_n de **termo geral da sequência**.
- (ii) Quando existir o último elemento na sequência, dizemos que ela é **finita**. Caso contrário, dizemos que a sequência é **infinita**.
- (iii) Neste curso vamos trabalhar com sequências infinitas.

Exemplo 3.3 a) Seja (a_n) uma sequência cujos termos são: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$. Então:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{1}{n}.$$

Uma maneira de representar esta sequência é escrevê-la com:

$$(a_n) = \left(\frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

b) A sequência $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \dots$ pode ser representada por:

$$b_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é ímpar;} \\ \frac{1}{n+1}, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Exercícios 3.4 Determine o termo geral de cada sequência abaixo:

i) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

iv) $1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \dots$

ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

v) $2, 7, 12, 17, \dots$

iii) $1, 3, 5, 7, \dots$

vi) $0, 2, 0, 2, \dots$

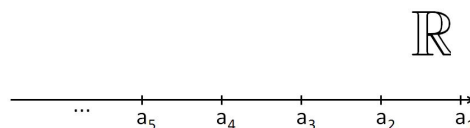
Definição 3.5 Dizemos que as sequências (a_n) e (b_n) são iguais quando $a_i = b_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Note que as sequências

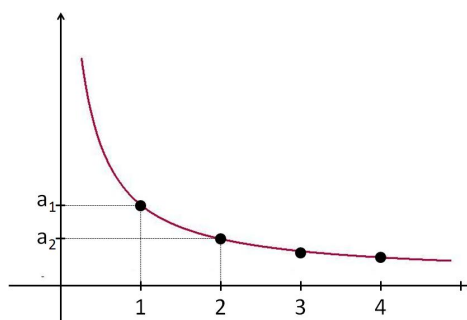
$$\left(\frac{1}{n} \right) \text{ e } 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \dots,$$

definidas acima, possuem os mesmos elementos, mas são distintas pois, por exemplo, $a_3 = \frac{1}{3}$ e $b_3 = 1$.

Geometricamente, visualizamos uma sequência de duas maneiras: como números ou pontos sobre uma reta,



ou como uma função formada por pontos isolados no plano cartesiano.



3.1.1 Limite de sequências

Seja (a_n) uma sequência tal que $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$. Observe que os termos da sequência estão cada vez mais próximos de 0, embora nunca assumirão este valor, ou seja, podemos obter termos da sequência tão próximos de zero quanto quisermos, bastando para isso considerar n suficientemente grande. Isto nos motiva a dar a seguinte definição:

Definição 3.6 Considere a sequência (a_n) e seja a um número real. Definimos:

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ se}$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon.$$

Neste caso, dizemos que existe o **limite** de a_n e que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \text{ se}$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow a_n > \epsilon.$$

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \text{ se}$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow a_n < -\epsilon.$$

Observe que a definição de limite de uma sequência é muito parecida com a definição de limite de funções reais, com x tendendo a infinito, vista no Cálculo I.

Teorema 3.7 Seja $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real que está definida para todo inteiro positivo $x \geq 1$. Se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, então a sequência $a_n = f(n), n \geq 1$, é convergente e $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = L$.

Demonstração: Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, então, para cada número positivo ϵ , existe um número real $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$, para todo $x \geq \delta$. Seja n_0 um número inteiro maior que δ . Então:

$$\forall n > n_0, \Rightarrow |a_n - L| = |f(n) - L| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = L$$

□

Exemplo 3.8 Sejam (a_n) e (b_n) sequências definidas por $a_n = \frac{2n}{6n+1}$ e $b_n = \frac{\ln n}{n}, n \geq 1$. Calcule o limite destas sequências:

Solução:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{6n+1}.$$

Seja $f(x) = \frac{2x}{6x+1}$ é definida para todo real $x \geq 1$ e coincide com a sequência dada nos inteiros positivos. Note que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{6x+1} = \frac{1}{3}$. O Teorema 3.7 nos garante que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{6n+1} = \frac{1}{3}.$$

Observe que neste exemplo podemos usar a regra de L'Hôpital, pois o limite dado é uma forma indeterminada do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}.$$

A função $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ é definida para todo real $x \geq 1$ e coincide com a sequência dada nos inteiros positivos. Portanto, pelo Teorema 3.7, segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}$ será igual a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$ se esse último existir. Usando a regra de L'Hôpital, temos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Concluimos então que: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

□

Exercício 3.9 Mostre que:

$$i) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$ii) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1$$

Definição 3.10 Dizemos que uma sequência (a_n) é **convergente** se existe o limite de a_n com n tendendo a infinito. Caso contrário, dizemos que ela é **divergente**.

O Teorema 3.7 nos assegura que as propriedades de limite de funções também são válidas para limite de sequências.

Teorema 3.11 Sejam $(a_n)_{n \geq 1}$ e $(b_n)_{n \geq 1}$ duas sequências. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = M$, então:

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot L;$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = L + M;$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = L \cdot M;$$

$$(iv) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M}, \text{ desde que } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0 \text{ e } b_n \neq 0, \forall n \geq 1.$$

Demonstração:

- (i) Seja $\epsilon > 0$. Como (a_n) é uma sequência convergente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que quando $n > n_0$ tem-se $|a_n - L| < \epsilon/(|c| + 1)$. Assim, para o mesmo n_0 , temos:

$$|c \cdot a_n - c \cdot L| = |c| \cdot |a_n - L| < \epsilon.$$

- (ii) Dado $\epsilon > 0$, devido a convergência das sequências (a_n) e (b_n) existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que, se $n > n_1$, então $|a_n - L| < \epsilon/2$ e, se $n > n_2$, então $|b_n - M| < \epsilon/2$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Logo, se $n > n_0$ teremos:

$$|(a_n + b_n) - (L + M)| \leq |a_n - L| + |b_n - M| < \epsilon.$$

- (iii) Seja $\epsilon > 0$. Temos

$|a_n \cdot b_n - L \cdot M| = |a_n \cdot b_n - a_n \cdot M + a_n \cdot M - L \cdot M| \leq |a_n| \cdot |b_n - M| + |M| \cdot |a_n - L|$. Como (a_n) converge, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < 1$, para $n > n_1$. Logo, $|a_n| < |L| + 1$ e, da convergência das sequências (a_n) e (b_n) , existem $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ tais que:

$$|a_n - L| < \epsilon/2(|L| + 1),$$

se $n > n_1$ e

$$|b_n - M| < \epsilon/2(|M| + 1),$$

quando $n > n_2$.

Tome $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$. Se $n > n_0$, então:

$$|a_n \cdot b_n - L \cdot M| < \epsilon.$$

- (iv) Seja $\epsilon > 0$.

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{L}{M} \right| = \left| \frac{a_n \cdot M - b_n \cdot L}{b_n \cdot M} \right| \leq \frac{|a_n| |b_n - M|}{|b_n| |M|} + \frac{|a_n - L|}{|M|}.$$

Da convergência de (a_n) , existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < 1$, ou seja, $|a_n| < |L| + 1$, para $n > n_1$ e, além disso, $|a_n - L| < \frac{M \cdot \epsilon}{2}$; $M > 0$, para $n > n_2$. Da convergência

de (b_n) existem $n_3, n_4 \in \mathbb{N}$ tais que $|b_n - M| < 1$, ou seja, $\frac{1}{|b_n|} < \frac{1}{|M - 1|}$, quando

$$n > n_3 \text{ e, se } n > n_4 \text{ temos } |b_n - M| < \frac{(M^2 - M)\epsilon}{2(|L| + 1)}.$$

Seja $n_0 = \max\{n_i\}$, para $i = 1, 2, 3, 4$. Assim, se $n > n_0$ teremos:

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{L}{M} \right| < \epsilon.$$

□

Exercício 3.12 Em cada item, determine se a sequência converge ou diverge.

$$i) \left(\frac{n}{2n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$iii) \left((-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$ii) \left((-1)^{n+1} \frac{n}{2n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$iv) (8-2n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Teorema 3.13 (*Teorema do Confronto para Sequências*)

Sejam as seqüências (a_n) , (b_n) e (c_n) , tais que $a_n \leq c_n \leq b_n, \forall n \geq 1$. Se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L,$$

então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L.$$

Demonstração: Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$, dado $\epsilon > 0$ existem números naturais n_1 e n_2 tais que :

$$(a) \forall n > n_1 \text{ tem-se : } |a_n - L| < \epsilon$$

e

$$(b) \forall n > n_2 \text{ tem-se : } |b_n - L| < \epsilon$$

Seja n_0 um número natural tal que $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Como $a_n \leq c_n \leq b_n$, segue que:

$$L - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < L + \epsilon,$$

ou seja, $\forall n > n_0$, temos que: $|c_n - L| < \epsilon$, logo $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ □

Exemplo 3.14 Mostre que a seqüência (a_n) tal que $a_n = \frac{n!}{n^n}$, $n \geq 1$, converge e encontre seu limite.

Solução: Nesta seqüência temos:

$$\begin{aligned} \bullet a_{n+1} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!(n+1)}{(n+1)^n(n+1)} = \frac{n!}{n^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = a_n \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\ \bullet \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < 1, \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

Observe que: $0 < a_n \leq \frac{1}{n}$. Por outro lado, cada uma das sequências $(0)_{n \in \mathbb{N}}$ e $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tem limite zero quando n tende a infinito. Portanto, pelo Teorema do Confronto para Sequência, a sequência $\left(\frac{n!}{n^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ também converge para zero. $\square$

Proposição 3.15 (*Critério da Comparação para Sequências Divergentes*) Sejam (a_n) e (b_n) duas sequências. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ e se $b_n > a_n$, a partir de um certo n_0 , então $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

Demonstração: Por definição, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe um natural n_1 tal que se $n > n_1$, temos $a_n > \epsilon$. Tome $n_0 > n_1$. Como $b_n > a_n$, para todo $n > n_0$ teremos

$$b_n > a_n > \epsilon,$$

ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$. $\square$

Definição 3.16 Dizemos que uma sequência (a_n) é:

- (a) **crescente** se $a_n \leq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$,
- (b) **decrescente** se $a_n \geq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação 3.17

- (i) Sequências crescentes (ou decrescentes) são chamadas **sequências monótonas**.
- (ii) No caso de $a_n < a_{n+1}$ (ou $a_n > a_{n+1}$) dizemos que a sequência (a_n) é estritamente crescente (ou estritamente decrescente).

Exemplo 3.18 i) A sequência (a_n) tal que $a_n = n$ é estritamente crescente, pois:
 $a_n = n < a_{n+1} = n + 1, \forall n \geq 1$.

ii) A sequência (a_n) tal que $a_n = \frac{2^n}{n!}$ é estritamente decrescente, pois:

- $a_n > 0, \forall n \geq 1$.

- $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2^n \cdot 2}{n!(n+1)},$ ou seja $a_{n+1} = a_n \cdot \left(\frac{2}{n+1}\right) \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{n+1} \leq 1, \forall n \geq 1.$ Logo $a_{n+1} < a_n, \forall n \geq 2$. Observe que $a_1 = a_2 = 1$.

iii) A sequência (a_n) tal que $a_n = \frac{\ln(n+2)}{n+2}$ é monótona.

De fato, considere a função f tal que $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x+2}$, x é real e $x \geq 1$. Temos que $f'(x) = \frac{1 - \ln(x+2)}{(x+2)^2} < 0$ e como a derivada é negativa $\forall x \geq 1$, temos que a função é decrescente, ou seja, a sequência é monótona.

Definição 3.19 Uma sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ é dita:

- (a) **limitada superiormente** se existe uma constante real M tal que $a_n \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$,
- (b) **limitada inferiormente** se existe uma constante real N tal que $a_n \geq N$, para todo $n \in \mathbb{N}$,
- (c) **limitada** quando ela for limitada superiormente e inferiormente.

Exemplo 3.20 i) A sequência (a_n) tal que $a_n = \frac{1}{n}$ é estritamente decrescente, pois:

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < a_n = \frac{1}{n}, \forall n \geq 1. \text{ Como } a_1 = 1 > a_n, \forall n \geq 2 \text{ e também } a_n = \frac{1}{n} > 0, \forall n \geq 1, \text{ logo: } 0 < a_n \leq 1, \text{ ou seja, a sequência é monótona e limitada.}$$

ii) A sequência (a_n) tal que $a_n = n$ é estritamente crescente. Observe que a_n é limitada inferiormente por 1, mas não é limitada superiormente.

Axioma 3.21 (**Axioma do completamento**)

Todo subconjunto não vazio e limitado de números reais possui supremo e ínfimo.

Teorema 3.22 (Teorema da convergência monótona.)

Toda sequência monótona limitada é convergente.

Demonstração: Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência monótona. Sem perda de generalidade, suponha que ela seja crescente. Como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, pela observação acima, temos que é limitada superiormente, ou seja, existe um número real M tal que

$$a_n \leq M,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. O número M é a menor das cotas superiores.

Assim, dado $\epsilon > 0$, existirá um índice N que, a partir do qual $a_n > M - \epsilon$. Como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente, sabemos que $a_n < a_{n+1}$, para todo natural n . Então, se $n > N$, segue que

$$M - \epsilon < a_N < a_n < M < M + \epsilon.$$

Daqui, concluímos que, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq N$, então $|a_n - M| < \epsilon$.

Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = M$ e a sequência é convergente. □

Exemplo 3.23 Seja (a_n) uma sequência tal que $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Mostre que esta sequência é convergente.

Solução:

- observe que $a_n > 0, \forall n \geq 1$
- $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)n^n n!}{(n+1)^n (n+1)n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} < 1 \implies a_{n+1} < a_n, \forall n \geq 1, \implies (a_n) \text{ é estritamente decrescente. Logo } a_1 = 1 > a_n \quad \forall n \geq 2, \text{ ou seja, } 1 \text{ é uma cota superior para } a_n.$$
- Como $a_n > 0, \forall n \geq 1$ e, assim, $0 < a_n \leq 1, \forall n \geq 1$.
- Daí, a sequência (a_n) é monótona e limitada, e portanto, pelo Teorema da Convergência Monótona, ela é convergente.

□

Teorema 3.24 Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração:

Como a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente, dado $\epsilon = 1$, existe um natural n_0 tal que se $n > n_0$, então $|a_n - a| < 1$, ou seja, $|a_n| < |a| + 1$.

Seja $K = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a|\}$. Então $|a_n| < K$, para todo natural n e a sequência é limitada.

□

Observação 3.25

No Teorema da Convergência Monótona, as duas hipóteses (ser limitada e monótona) são indispensáveis. Se consideramos apenas sequências limitadas, elas podem convergir ou não. Como exemplo, a sequência $((-1)^n)$, limitada inferiormente por -1 e superiormente por 1 , mas que não converge. Justificaremos sua divergência ao tratarmos de subsequências na próxima seção.

Exemplo 3.26 Estude a convergência da sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ dada por $a_n = \frac{2^n}{n!}$.

Solução: Observe que:

- $a_n > 0, \forall n \geq 1$.
- $$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2^n \cdot 2}{n! \cdot (n+1)} = \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{2}{(n+1)} = a_n \cdot \frac{2}{n+1} \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{n+1} < 1, \forall n \geq 2, \text{ ou seja, } (a_n) \text{ é decrescente.}$$

Logo, $0 < a_n \leq 2$, e assim a sequência é monótona e limitada. Portanto, pelo teorema da Convergência Monótona então (a_n) converge. $\square$

Exercício 3.27 Seja $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$. Resolva os itens abaixo:

- Exprima a_{n+1} em função de a_n ;
- Mostre que (a_n) é estritamente decrescente.
- Mostre que (a_n) é convergente.

Teorema 3.28 Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ e $(b_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência limitada, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$ (mesmo que não exista $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$).

Demonstração: Existe $c > 0$ tal que $|b_n| < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\epsilon > 0$, como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0 \Rightarrow |a_n| < \frac{\epsilon}{c}$. Logo, $\forall n > n_0 \Rightarrow |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\epsilon}{c} \cdot c = \epsilon$. Isto mostra que $a_n \cdot b_n \rightarrow 0$ $\square$

Exemplo 3.29 Mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n} = 0$.

Solução: Note que:

- A função $\text{sen}(nx)$ é limitada, pois $|\text{sen}(nx)| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Daí, pelo teorema 3.28 temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \cdot \text{sen}(nx) \right] = 0$ $\square$

3.1.2 Subseqüências

Dada uma sequência (a_n) tal que $a_n = n$ podemos obter a partir dela outras seqüências. Como motivação para este estudo, vamos construir a partir da sequência (a_n) as seguintes seqüências:

- $1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots$ formado pelos termos de índices ímpares de a_n .
- $2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$ formado pelos termos de índices pares de a_n .
- $3, 4, 5, \dots, n+2, \dots$ obtida acrescentando-se duas unidades a cada termo da sequência inicial.

As seqüências obtidas da inicial, retirando um número finito ou infinito de termos e renumerando-os, são chamadas de **subseqüências**. Formalmente, temos a seguinte:

Definição 3.30 Seja (a_n) uma sequência. Dizemos que (b_n) é uma **subsequência** de (a_n) se existirem números naturais $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ tais que

$$t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$$

e $b_n = a_{t_n}$.

Proposição 3.31 Sejam $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma subsequência de (a_n) . Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

Demonstração: Como (b_n) é uma subsequência de (a_n) podemos escrever

$$b_n = a_{t_n}$$

onde

$$t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots \quad (t_i \text{ natural}).$$

Sendo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, dado $\epsilon > 0$, existe um natural n_0 tal que se $n > n_0$ temos que $|a_n - L| < \epsilon$. Mas, para todo natural n existe t_n pertencente $\mathbb{N}$ tal que $t_n > n$. Daí, $\forall t_n > n > n_0$ teremos $|a_{t_n} - L| < \epsilon$, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{t_n} = L$$

□

Observação 3.32 Da Proposição 3.31 podemos concluir que:

Se duas subsequências de uma sequência convergem para valores distintos, então a sequência é divergente.

Exemplo 3.33 A sequência $(a_n) = ((-1)^n + 1)$ é divergente.

De fato, se tomarmos as subsequências:

$$(a_{2n}) = \{2, 2, 2, \dots\} \quad \text{dos índices pares}$$

$$(a_{2n-1}) = \{0, 0, 0, \dots\} \quad \text{dos índices ímpares}$$

percebemos que elas convergem para valores diferentes. Portanto, pela Proposição 3.31, a sequência $\{(-1)^n + n\}$ é divergente, pois tem pelo menos duas subsequências, (a_{2n}) e (a_{2n-1}) , que convergem para valores distintos.

Em outras palavras, a proposição nos diz que se uma sequência (a_n) converge para L , então todas as suas subsequências também irão convergir para L .

Exemplo 3.34 Considere a sequência $(a_n) = \{1, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{4}, 2, \frac{1}{8}, 2, \dots\}$. Note que $(b_n) = \{2, 2, 2, 2, 2, \dots\}$ e $(c_n) = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\}$ são ambas subsequências de (a_n) . Observe que (b_n) é uma sequência constante, que obviamente converge para 2, ao passo que (c_n) converge para zero. Assim, a sequência (a_n) é divergente.

Observação 3.35 Da Proposição 3.31 também podemos concluir que:

Se a sequência (a_n) tem pelo menos uma subsequência divergente, então (a_n) também é divergente.

Exemplo 3.36 Considere a sequência $(a_n) = \{1, 5, 2, 5, 3, 5, 4, 5, 5, 5, 6, 5, \dots\}$ e sejam $(b_n) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ e $(c_n) = \{5, 5, 5, 5, 5, \dots\}$ duas subsequências de (a_n) . Observe que (c_n) converge para 5, mas (b_n) é divergente, pois não é limitada. Daí (a_n) é divergente.

Observação 3.37 Uma outra consequência importante da proposição 3.31 é que:

Seja (a_n) uma sequência e sejam (b_{2n}) e (b_{2n+1}) as subsequências de (a_n) de índices par e ímpar, respectivamente. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1}$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

Exemplo 3.38 Considere a sequência $(a_n) = \{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\}$. Note que $a_{2n+1} = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots\}$ e $a_{2n} = \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \dots\}$ são duas subsequências de (a_n) de índices ímpar e par, respectivamente, e que ambas convergem para zero. Então, a sequência (a_n) também converge para zero.

3.2 Uma sequência especial: A Sequência de Fibonacci

Leonardo Pisa, também conhecido como Leonardo Pisano ou ainda Leonardo Bigollo, foi um matemático italiano, tido como o primeiro grande matemático da Idade Média. Ele ficou conhecido pelo seu pseudônimo *Fibonacci*.

Fibonacci escreveu vários livros, mas o que o consagrou na Matemática e áreas afins foi o livro *Liber Abaci*, no qual aparece o famoso problema dos coelhos, cujo enunciado é :

“Quantos casais de coelhos podem ser produzidos a partir de um único casal durante um ano se: cada casal, a cada mês der origem a um novo casal que este se torna fértil a partir do segundo mês e não ocorrerem mortes?”

Nas condições propostas, constata-se que um casal nasce no primeiro mês, totalizando assim 2 casais. Durante o segundo mês, o primeiro casal produz um novo casal. Um mês depois, o casal original e o que nasceu imediatamente após o seu acasalamento produzem novos casais, totalizando 3 casais adultos e 2 casais filhotes, de modo que obteremos a seguinte sequência de casais

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots$$

Esta sequência, obtida a partir o problema dos coelhos proposta por Fibonacci ficou conhecida por **Sequência de Fibonacci**.

A sequência de Fibonacci tem inúmeras aplicações tanto na Matemática quanto em outras áreas do conhecimento. Por exemplo, ela é usada na análise de mercados financeiros, na ciência da computação e na teoria dos jogos. Na Biologia ela aparece na disposição dos galhos das árvores ou das folhas em uma haste, no arranjo do cone da alcachofra, do abacaxi, ou no desenrolar da samambaia.

Analisando a sequência dos coelhos podemos nos perguntar:

- (i) Existe uma fórmula para descrever os termos da sequência de Fibonacci?
- (ii) É possível encontrar uma fórmula simples para a soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci?

Se observamos atentamente a sequência, percebemos que, a partir do terceiro termo, todos os demais são obtidos pela soma dos dois termos antecedentes. Deste modo, podemos definir a Sequência de Fibonacci recursivamente, por:

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ 1, & \text{se } n = 1 \\ a_{n-1} + a_{n-2}, & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

A sequência de Fibonacci é a primeira sequência recursiva conhecida na literatura matemática. (Uma sequência é chamada recursiva quando um termo qualquer dessa sequência é uma função de um ou mais termos precedentes na sequência). Para calcularmos a soma dos n primeiros termos desta sequência, uma fórmula é:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_{n+2} - 1.$$

Podemos ainda encontrar a sequência de Fibonacci em *cálculos de M.D.C*, no *Triângulo de Pascal*, nos *coeficientes do Binômio de Newton* e em resultados como o *Teorema de Lucas* e a *Fórmula de Binet*. No entanto, dentre tantas aplicações o que vamos fazer é mostrar que é possível extrair da sequência de Fibonacci uma subsequência que converge para o **número de ouro**.

Considere a sequência (r_n) obtida pela razão entre os termos consecutivos da sequência de Fibonacci, ou seja,

$$\left(r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \dots \right\}.$$

Dentre as características desta sequência, destacamos que a sequência dos intervalos fechados: $[r_1, r_2], [r_3, r_4], [r_5, r_6], [r_7, r_8], \dots$ é encaixante, isto é, cada um está inteiramente contido no anterior: $[r_1, r_2] \supseteq [r_3, r_4] \supseteq [r_5, r_6] \supseteq [r_7, r_8] \supseteq \dots$. Além disso, o limite do comprimento de cada um desses intervalos tende a zero quando n tende ao infinito.

Nos Cursos de Introdução à Análise Real, estuda-se “**O Princípio dos Intervalos Encaixantes**” que nos assegura: “Se $I_1, I_2, I_3, \dots$ é uma sequência de intervalos fechados e limitados tais que $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$, e se o comprimento de cada $I_n, n \geq 1$, tende a

zero quando n tende a infinito, então existe um, e somente um número real que pertence a todos os intervalos da sequência, ou seja, existe o limite". Vamos mostrar que o limite desta sequência é o número de ouro.

Considere a sequência de Fibonacci dada pela fórmula recursiva

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Dividindo ambos os membros desta igualdade por (a_{n+1}) obtemos:

$$r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}.$$

Se $r_n \rightarrow L$ quando $n \rightarrow +\infty$, então, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_{n+1} = L$ pois (r_{n+1}) é uma subsequência de (r_n) . Assim,

$$L = 1 + \frac{1}{L} \Leftrightarrow L^2 - L - 1 = 0.$$

Resolvendo a equação do segundo grau, encontramos

$$L_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad L_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Mas a sequência (r_n) é de termos positivos, logo não pode convergir para $L_2 < 0$. Portanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = L_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

que é chamado **número de ouro** ou **razão áurea**.

O número de ouro é encontrado, por exemplo, nas proporções de certas medidas do corpo humano.

Exercícios 3.39 1. Verifique se as sequências abaixo são divergentes ou convergentes, caso sejam convergentes, para onde convergem? Lembrando que $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

(a) $\left(\frac{n^2}{2n^2 + 1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

(b) $(2 + \cos(n\pi))_{n \in \mathbb{N}}$

(c) $\left(\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$

(d) $(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n-3})_{n \in \mathbb{N}}$

(e) $\left(\frac{e^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

(f) $(n^2 e^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$

(g) $\left(\frac{n^3 - 3n^2 + 4}{n^3 - n^2 - 8n + 12}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

(h) $\left((-1)^n \frac{n^3}{1 + 2n^4}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

(i) $\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

(j) $\left(\frac{1 - 3n}{1 - n}\right)_{n \geq 2}$

(k) $\left(\frac{n^2}{2n-1} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$

$$(l) \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$(m) (n - \sqrt{n^2 - n})_{n \in \mathbb{N}}$$

2. Mostre que a sequência $\left(\frac{\cos n}{n}\right)$ é convergente, sendo $n \geq 1$.

3. Use o Teorema do Confronto para mostrar que a sequência $\left(\frac{3 + (-1)^n}{n^2}\right)$ é convergente.

4. Resolva os limites abaixo:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{arctg}(1/x)}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x) \cdot \ln(1-x)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - \sqrt{x^4 x^2 + 1}$$

5. Determine o valor de c tal que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = 4.$$

6. Dê um contraexemplo para justificar que a proposição é falsa:

- a) Toda sequência limitada é convergente;
- b) Toda sequência divergente é não limitada;
- c) Toda sequência alternada é divergente;
- d) Se uma sequência (a_n) diverge, então a sequência $(|a_n|)$ também diverge.

7. A proposição a seguir é verdadeira ou falsa: se uma sequência converge para um limite L , então toda subsequência sua também converge para L .

8. Construa uma sequência que tenha uma subsequência convergindo para -4 e outra convergindo para 10 .

9. Dê um exemplo de uma sequência que seja limitada e convergente, porém que não seja monótona.

10. Dada a sequência (a_n) , onde $a_n > 0$ para todo n e $a_{n+1} < k a_n$ com $0 < k < 1$. Prove que (a_n) é convergente.

11. Prove que se a sequência (a_n) for convergente e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, então a sequência a_n^2 também será convergente e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = L^2$.

Capítulo 4

Séries Infinitas

Neste capítulo estudaremos as somas de um número infinito de termos. Para entendermos como é feita esta soma considere a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Vamos construir uma nova sequência formada por somas parciais da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 = s_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n \end{aligned}$$

A sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtida de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é chamada de **série infinita associada à sequência** $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e é representada por

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

ou, simplesmente por

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

Os números a_k são os termos da série e os números $s_1, s_2, \dots$ são as somas parciais da série infinita de ordem $1, 2, \dots$. Assim, por exemplo, s_{20} representa a soma parcial de ordem 20 da série.

Definição 4.1 Se existe $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s$, dizemos que a série infinita $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ é **convergente** e tem soma s . Caso contrário, dizemos que a série é **divergente**.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 4.2 Estude a convergência das séries abaixo, no caso de ser convergente, calcule sua soma:

$$1. \sum_{k=1}^{+\infty} k = 1 + 2 + \cdots + n + \cdots$$

$$2. \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots$$

Solução:

1. Observe que a soma parcial de ordem n desta série é dada por:

$$s_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{e como}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty, \text{ então a série diverge.}$$

2. Note que

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{3} \\ s_2 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{2}{5} \\ s_3 &= \frac{2}{5} + \frac{1}{35} = \frac{3}{7} \\ s_4 &= \frac{3}{7} + \frac{1}{6} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Em geral não é simples obter uma fórmula de recorrência para soma parcial de ordem n de uma série.

Neste exemplo, usaremos frações parciais para decompor a_n na forma:

$$a_n = \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{a}{2n - 1} + \frac{b}{2n + 1}$$

Calculando as constantes a e b , obtêm-se:

$$a = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad b = -\frac{1}{2}$$

E, assim:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1} \end{aligned}$$

Logo, $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}$. E portanto, a série dada é convergente e sua soma é $\frac{1}{2}$.

□

4.1 Série Geométrica

Dentre as séries infinitas importantes destaca-se a Série Geométrica, caracterizada pelo fato de que cada termo dela é obtido multiplicando-se o termo precedente por alguma constante fixa não nula. Assim, se o termo inicial da série é a e cada termo é obtido multiplicando-se o termo precedente por r , que é chamado de razão da série, então a série tem a forma:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$$

São exemplos de séries geométricas,

- $1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots$
- $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \dots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \dots$
- $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^k + \dots$

Pode ocorrer que o termo geral de uma série geométrica não esteja representado exatamente na forma $\sum_{k=1}^{+\infty} ar^{k-1}$. Neste caso, o leitor deve fazer as manipulações necessárias a fim de escrever a série na forma conveniente, como no exemplo a seguir.

Exemplo 4.3 A série, $\sum_{k=1}^{+\infty} 3^{2k} 5^{1-k}$ é uma série geométrica, pois:

$$a_n = 3^{2k} 5^{1-k} = \frac{9^k}{5^{k-1}} = 9 \left(\frac{9}{5}\right)^{k-1},$$

que caracteriza uma série geométrica de razão $r = \frac{9}{5}$ e $a = 9$.

Teorema 4.4 *Uma série geométrica*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$$

converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$. Se a série convergir, então a soma da série é:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} ar^{k-1} = \frac{a}{1-r}.$$

Demonstração: Trataremos primeiro do caso $|r| = 1$.

Se $r = 1$, então a série é:

$$a + a + a + a + \dots$$

Logo, a n -ésima soma parcial é: $s_n = (n+1)a$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)a = \pm\infty$ (conforme a seja positivo ou negativo). Isso prova a divergência.

Se $r = -1$, a série é:

$$a - a + a - a + \dots$$

Logo, a sequência das somas parciais é: $a, 0, a, 0, \dots$ e a série diverge, pois não existe $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

Agora consideremos o caso onde $|r| \neq 1$. A n -ésima soma parcial da série é

$$s_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n \quad (4.1)$$

Multiplicando ambos os lados de 4.1 por r , obtém-se

$$rs_n = ar + ar^2 + \dots + ar^n + ar^{n+1} \quad (4.2)$$

subtraindo 4.2 de 4.1, obtém-se:

$$s_n - rs_n = a - ar^{n+1} \quad \text{ou} \quad (1-r)s_n = a - ar^{n+1}.$$

Como $r \neq 1$ então, podemos escrever s_n na forma:

$$s_n = \frac{a - ar^{n+1}}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^{n+1}}{1-r}. \quad (4.3)$$

- Se $|r| < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0$. Assim, (s_n) converge. A partir de 4.3, obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{a}{1-r}.$$

- Se $|r| > 1$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} |r|^{n+1} = +\infty$, portanto série diverge.

□

Exemplo 4.5 Uma bola cai de uma altura de 30m. Cada vez que ela bate no chão ela sobe verticalmente, percorrendo uma distância igual a $\frac{2}{3}$ da altura precedente. Ache a distância total (na vertical) que a bola percorrerá até o repouso.

Solução:

A distância total que a bola percorrerá é obtida pela soma das distâncias, na vertical, de cada vez que a bola ricocheteia o chão, lembrando que para cada vez que a bola sobe, ela desce a mesma altura até bater no chão, para ricochetear novamente. Então a distância total é dada pela soma infinita:

$$\begin{aligned} D_t &= 30 + \frac{2}{3}30 + \frac{2}{3}30 + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}30\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}30\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}30\right)\right) + \dots \\ &= 30 + 2\left(\frac{2}{3}\right)30 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 30 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^3 30 + \dots \\ &= 30 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\left(\frac{2}{3}\right)^n 30 \end{aligned}$$

Observe que a série da última igualdade é uma série geométrica com razão r tal que $|r| = \frac{2}{3} < 1$. Pelo teorema 4.4 esta série converge e sua soma é:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{60}{1 - \frac{2}{3}} = 180.$$

Portanto, a distância vertical total que a bola percorrerá é

$$30m + 180m = 210m.$$

□

Uma aplicação interessante da série geométrica ocorre na determinação da geratriz de uma dízima periódica.

Exemplo 4.6 Expressar a dízima periódica $5,232323\dots$ como razão de dois inteiros.

Solução: Observe que uma dízima periódica pode ser escrita como uma série geométrica infinita e, a partir do conhecimento desta série, podemos obter sua soma que irá representar a geratriz da dízima. A dízima $5,232323\dots$ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} 5,232323\dots &= 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{100^2} + \frac{23}{100^3} + \dots \\ &= 5 + \frac{23}{100} \overbrace{\left(1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \dots\right)}^{s_n = 1/(1-0,01)} \\ &= 5 + \frac{23}{100} \left(\frac{1}{0,99}\right) = 5 + \frac{23}{99} = \frac{518}{99}. \end{aligned}$$

Assim, $\frac{518}{99}$ é a geratriz procurada.

□

4.2 Critério do Termo Geral

Para uma série qualquer nem sempre é fácil (ou mesmo possível) obter uma fórmula para a soma parcial s_n de uma série em função de n . Por este motivo vamos enunciar alguns teoremas que vão nos permitir determinar se uma série é convergente ou divergente. O primeiro desses teoremas é chamado de Critério do Termo Geral.

Teorema 4.7 Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série infinita convergente, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Demonstração: Por hipótese, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente. Então $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{n-1} = s$. Além disso, sabemos que

$$s_n = s_{n-1} + a_n \Rightarrow a_n = s_n - s_{n-1}.$$

Aplicando o limite, segue que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0.$$

□

Observação 4.8 O teorema 4.12 é conhecido como **critério do termo geral**. A recíproca do teorema não é válida. Um contraexemplo para esta afirmação é a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ chamada de série harmônica. Veremos posteriormente que esta série diverge, embora:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Podemos e, na maioria das vezes, é o que fazemos, utilizar o teorema 4.12 na sua versão contrapositiva para identificar séries divergentes, ou seja, **se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0$, ou se $\nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, então a série é divergente.**

Exemplo 4.9 Verifique se as séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n + 1$$

são séries convergentes.

Solução: No primeiro caso, basta verificarmos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \neq 0$, portanto a série diverge.

No segundo caso podemos considerar a sequência

$$\{(-1)^n + 1\} = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\}$$

e observar que ela tem duas subsequências convergindo para valores diferentes, ou seja, não existe $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Daí, (a_n) diverge e, conseqüentemente, a série diverge, pelo critério do termo geral na sua versão contrapositiva.

□

4.3 Séries Telescópicas

Definição 4.10 Definimos uma **soma telescópica** de ordem n com uma soma da seguinte forma:

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \dots + (a_n - a_{n-1}).$$

Reescrevendo a soma, temos:

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \dots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_1.$$

Naturalmente qualquer sequência de termos b_n pode ser escrita como uma soma telescópica.

$$b_n = b_1 + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \dots + (b_n - b_{n-1}).$$

Uma série cuja a sequência das somas parciais tem o comportamento de uma soma telescópica é chamada de **série telescópica**.

Exemplo 4.11 Mostre que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Solução: Note que, neste caso, não é simples encontrar uma fórmula de recorrência para a soma parcial de ordem n da série. Um procedimento que permite obter de forma simples uma expressão para s_n é decompor o termo geral da série usando frações parciais.

Usando tal procedimento, podemos escrever:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}, \text{ obtendo-se } a = 1 \text{ e } b = -1.$$

$$\text{Daí temos: } \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Desta forma:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$, a série infinita converge e sua soma é 1, ou seja, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

□

4.4 Outros Teoremas sobre Convergência de Séries

Para uma análise mais abrangente sobre convergência e divergência de uma série nesta seção vamos apresentar outros importantes teoremas.

Teorema 4.12 Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries que diferem por uma quantidade finita de termos. Então, ou ambas convergem ou ambas divergem.

Demonstração: Considere as séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots$$

e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots,$$

onde a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ difere da série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ pelos n primeiros termos.

Suponha que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ seja convergente e seja s sua soma. Então para qualquer $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que se $n > n_0$ temos $|s_n - s| < \epsilon$. Ora, mas isso significa que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ também converge e que sua soma vale s .

Com um argumento análogo mostra-se a divergência. $\square$

Observação 4.13 Uma consequência deste teorema é que o índice n pode começar em qualquer k finito, $k \geq 1$.

Exemplo 4.14 Determine se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+10}$ converge ou diverge.

Solução: Observe que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+10} = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{n+10} + \cdots$$

esta série difere da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ pelos seus dez primeiros termos. Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge, pois se trata da série harmônica, então pelo teorema 4.12, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+10}$ diverge. $\square$

Teorema 4.15 Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são séries convergentes tal que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = R$, então

- (i) $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = S + R$;
- (ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - b_n) = S - R$;
- (iii) $\sum_{n=1}^{+\infty} (c \cdot (a_n)) = c \cdot S, c \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Por hipótese, as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ convergem. Assim, dado $\epsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que se $n > n_1$ e $n > n_2$, tem-se

$$|a_n - S| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad |b_n - R| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Considere $n_0 = \max \{n_1, n_2\}$. Daí,

$$|(a_n + b_n) - (S + R)| \leq |a_n - S| + |b_n - R| < \epsilon$$

e isso prova os itens (i) e (ii).

Da convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ podemos afirmar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ temos $|a_n - S| < \frac{\epsilon}{|c| + 1}$. Logo,

$$|c \cdot a_n - c \cdot S| = |c| \cdot |a_n - S| < (|c| + 1) \cdot |a_n - S| < \epsilon.$$

□

Exemplo 4.16 Mostre que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{3^{n-1}} + \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \right)$ converge para $\frac{21}{2}$.

Solução: Observe que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{3^{n-1}} \right)$ pode ser escrita como $5 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3^{n-1}} \right)$. Ela é uma série geométrica de razão $\frac{1}{3}$ multiplicada pela constante 5. Como $|r| = \frac{1}{3} < 1$, logo a série converge para:

$$5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2}.$$

De modo análogo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$ também é uma série geométrica, na qual a razão $|r| = \frac{2}{3} < 1$ converge para 3. Pelo teorema 4.15, a série dada converge para:

$$\frac{15}{2} + 3 = \frac{21}{2}.$$

□

Teorema 4.17 Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge, então: $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} c \cdot (b_n)$ são divergentes, a menos que c seja 0.

Demonstração: (a) Como $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge seja R sua soma. Suponha por contradição, que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ converge para S , ou seja, $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = S$. Assim,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} [(a_n + b_n) - a_n] = S - R,$$

o que é uma contradição, pois $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge.

(b) Suponha, por absurdo, que $\sum_{n=1}^{+\infty} c \cdot b_n$ seja convergente, $c \neq 0$. Logo, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (c \cdot s_n)$ existe.

Seja $\lim_{n \rightarrow +\infty} (c \cdot s_n) = M$. Como $s_n = \frac{c \cdot s_n}{c}$, passando ao limite com $n \rightarrow +\infty$, temos que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{1}{c} \cdot M$$

o que nos leva a concluir que $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente, o que é uma contradição. $\square$

Exemplo 4.18 Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{5^n} + n \right)$$

é divergente.

Solução: Note que a série geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^n}$, de razão $\frac{1}{5}$ converge, pois $|r| < 1$. No entanto, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} n$ diverge pelo critério do termo geral, pois $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$. Então pelo teorema 4.17 segue que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{5^n} + n \right)$ diverge. $\square$

Observações 4.19 • Considere as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, ambas divergentes. A primeira diverge pelo critério do termo geral e a segunda, por ser a série harmônica. Note que a soma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n + \frac{1}{n} \right)$$

diverge, pelo critério do termo geral.

- Observe que cada uma das séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{n}$ é divergente. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n}$ converge, por se tratar da série nula.

De acordo com os itens acima, se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são duas séries que divergem, então temos que analisar com cuidado a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$, pois essa pode ser convergente ou divergente.

4.4.1 Séries de Termos Positivos

Com o objetivo de nos prepararmos para provar o **Teste da Comparação**, enunciaremos o seguinte resultado auxiliar.

Lema 4.20 Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos positivos, ou seja, $a_n \geq 0$. Então:

(i) ou existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s$

(ii) ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$.

Demonstração: Considere a sequência das somas parciais (s) . Como a série é de termos positivos, temos as seguintes relações:

$$s_1 = a_1;$$

$$s_2 = a_1 + a_2 \leq s;$$

$$\vdots$$

$$s_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1}.$$

Logo,

$$s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0$$

e temos $s_{n+1} \geq s_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, a sequência (s_n) é crescente. Se (s_n) for limitada, pelo teorema da convergência monótona, ela converge e temos (i). Caso (s_n) seja ilimitada, então ela diverge, o que prova (ii). $\square$

Teorema 4.21 Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos positivos. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, sua sequência das somas parciais tiver um limitante superior.

Demonstração: Suponha que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ seja convergente. Então existe o limite das somas parciais, ou seja, existe $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = S$. Daí, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $n_0 > 0$ tal que $|s_n - S| < \epsilon$ sempre que $n > n_0$. Assim,

$$-\epsilon + S < s_n < S + \epsilon$$

e a sequência das somas parciais é limitada, logo tem um limitante superior.

Para provarmos a recíproca, devemos provar que se a sequência das somas parciais (s_n) tem um limitante superior, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge. Suponhamos, por contradição, que a série não seja convergente, ou seja, $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$. Então a sequência das somas parciais não tem um limitante superior, o que é uma contradição. $\square$

Teorema 4.22 (Teste da Comparação) Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries de termos positivos.

- (i) Se $a_n \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também converge.
- (ii) Se $a_n \geq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também diverge.

Demonstração:

- (i) Sejam

$$S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

e

$$T_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n.$$

Por hipótese, $a_n \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $S_n \leq T_n$. Como $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente e $\sum b_n$ converge, existe $M > 0$ tal que $T_n \leq M$. Daí,

$$0 \leq S_n \leq T_n \leq M.$$

Note que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência monótona crescente e limitada. Logo, existe

$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ e, por definição, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

- (ii) Análogo.

$\square$

Exemplo 4.23 Mostre que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ é convergente.

Solução: Observe que

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 \cdot 2 = 2^{n-1}.$$

Assim,

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

e, como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ converge, por ser uma série geométrica na qual o módulo da razão é menor que 1, pelo teorema 4.22, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ converge. $\square$

O próximo resultado, embora enunciado como teorema, trata-se de uma consequência imediata do teste da comparação.

Teorema 4.24 (*Teste da comparação por limite*) Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ séries de termos positivos e $b_n \neq 0$, $\forall n \geq 0$.

- (i) Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, então ou ambas as séries convergem ou ambas divergem.
- (ii) Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.
- (iii) Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Demonstração: Segue imediatamente do teste da comparação. $\square$

Exemplo 4.25 Determine se as séries abaixo convergem ou divergem:

- i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$;
- ii) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{3^n + 1}$.

Solução:

- i) Considere a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Como

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty$$

e, como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge segue, do teorema 4.24, que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$ diverge.

ii) Considere a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3^n}$. Como:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{3^n}}{\frac{3^n + 1}{3^n}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{3^n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + 3^{-n}} = 1\end{aligned}$$

e, como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3^n}$ converge segue, do teorema 4.24, que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3^n + 1}$ converge.

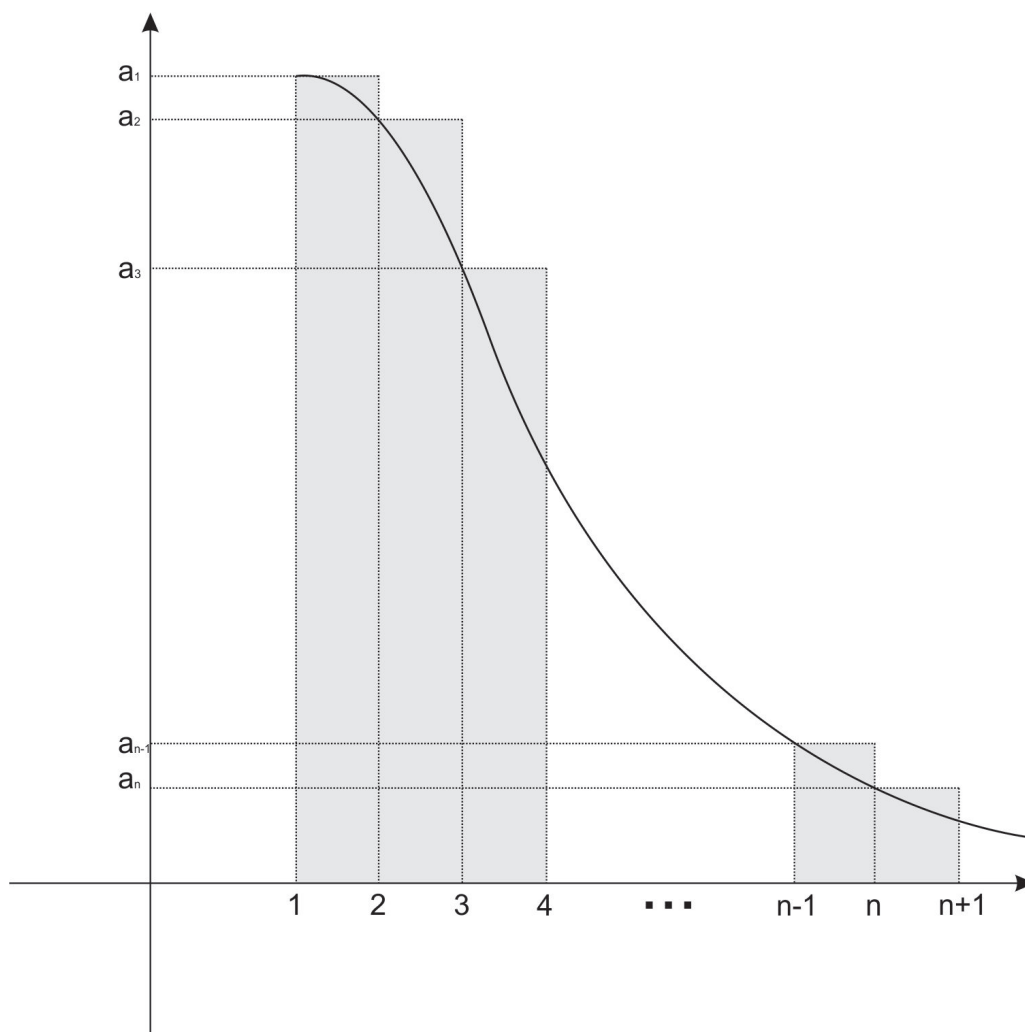
□

4.5 Teste da Integral

Teorema 4.26 (Teste da Integral) *Seja f uma função real contínua, decrescente e com valores positivos para todo $x \geq 1$ e seja $f(n) = a_n$ para todo inteiro $n \geq 1$. Então:*

- a série infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ será convergente se a integral imprópria $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ for convergente.
- a série infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ será divergente se a integral imprópria $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ for divergente.

Demonstração: Daremos uma demonstração geométrica desse resultado.



Note que

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx$$

e também

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq f(1) + f(2) + \cdots + f(n).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_1^{n+1} f(x) dx &\leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x) dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_1^{n+1} f(x) dx \leq s_n \leq a_1 + \int_1^n f(x) dx. \end{aligned}$$

Faça $n \rightarrow +\infty$. Se $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge, então (s_n) também converge, pelo teste da comparação e, portanto, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, o que prova a condição necessária.

Para provarmos a condição suficiente usaremos a contrapositiva. Suponha que $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ diverja, então (s_n) também diverge e, assim, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente. $\square$

Como uma aplicação do teste da integral, vamos provar que a série- p $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ converge se $p > 1$ e diverge quando $p \leq 1$.

- Se $p > 1$, então $f(x) = \frac{1}{x^p}$, x é real e $x \geq 1$, é uma função decrescente e positiva (mostre isso!).

Como:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^k = \frac{1}{p-1},$$

segue que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ converge, pelo teorema 4.26

- Se $p < 1$, então $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ diverge e, daí, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge, também pelo teorema 4.26.
- Se $p = 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln x) \Big|_1^b = \infty \implies$ a série diverge pois a integral diverge.

Exemplo 4.27 Verifique se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$ é convergente ou divergente.

Solução: Note que esta série satisfaz as hipóteses do teste da integral (teorema 4.26). De fato,

- $a_n = \frac{n}{e^{n^2}} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, isto é, trata-se de uma série de termos positivos;
- Seja $f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$ e $x \geq 1$. Observe que f uma função contínua, pois é quociente de duas funções contínuas.
- f é decrescente, pois $f'(x) = \frac{(1 - 2x^2)e^{x^2}}{e^{2x^2}} < 0$, $\forall x \geq 1$;

Sendo assim, a integral $\int_1^{+\infty} \frac{x}{e^{x^2}} dx = \frac{1}{2e}$, ou seja, ela é convergente. Pelo teorema 4.26, a série converge. $\square$

4.6 Séries Alternadas

Definição 4.28 Uma série do tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots,$$

ou do tipo,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^n a_n + \cdots$$

na qual $a_n > 0$, é chamada **série alternada**.

A seguir temos um exemplo de série alternada:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} = -1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \cdots$$

A respeito da convergência de tais séries, daremos a seguir as condições necessárias para que elas sejam convergentes.

Teorema 4.29 (Teste da Série Alternada) Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ (ou $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$) uma série alternada satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $a_n > 0$,
- (ii) (a_n) é decrescente,
- (iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ (ou $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$) converge.

Demonstração: Considere as subsequências das somas parciais:

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

$$S_{2n-1} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-3} - a_{2n-2}) + a_{2n-1}$$

A sequência $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente, pois

$$\begin{aligned} s_{2n+2} - s_{2n} &= \\ &= [(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) + (a_{2n+1} - a_{2n+2})] - \\ &\quad [(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})] \\ &= a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0. \end{aligned}$$

De modo análogo, mostramos que $(s_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ é decrescente.

Como $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada superiormente por s_1 e $(s_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada inferiormente por s_2 , podemos afirmar que existem s' e s'' tais que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n} = s' \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n-1} = s''.$$

Assim temos:

$$s'' - s' = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n-1} - \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (s_{2n-1} - s_{2n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} = 0.$$

Portanto, a sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\implies \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}$ converge. $\square$

Observação 4.30

- O teste da série alternada também é conhecido por **critério de Leibniz**.
- Caso uma das hipóteses do teste não seja verificada, **não** significa que a série é divergente.

Exemplo 4.31 Mostre que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ é convergente.

Solução: Note que:

- $a_n = \frac{1}{n} > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$,
- Como $n+1 < n$, segue que $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$, ou seja, a sequência $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ é decrescente,
- Além disso, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Logo, a série dada satisfaz as condições do teste da série alternada, portanto é convergente. $\square$

Definição 4.32 Seja uma série alternada infinita convergente de soma S . O resto obtido quando aproximamos a soma da série pela k -ésima soma parcial s_k , será denotado por R_k , e é definido por:

$$R_k = S - s_k.$$

Teorema 4.33 Considere a série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ $\left[\text{ou } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \right]$, onde $a_n > 0$ e $a_{n+1} < a_n$ para todo n inteiro positivo e $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ (isto é, satisfaz as hipóteses do teste da série alternada). Se R_k for o resto obtido quando aproximamos a soma da série pela soma dos k primeiros termos, então $|R_k| < a_{k+1}$.

Exemplo 4.34 Uma série para calcular $\ln(1+x)$, onde $x \in (-1, 1)$, é:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}. \quad (4.4)$$

Ache um limitante superior para o erro cometido quando aproximamos o valor de $\ln(1,1)$ pela soma dos três primeiros termos da série.

Solução: Usando a equação 4.4, e considerando $x = 0,1$, obtemos:

$$\ln(1+0,1) = \ln 1,1 = 0,1 - \frac{(0,1)^2}{2} + \frac{(0,1)^3}{3} - \frac{(0,1)^4}{4} + \dots$$

Observe que:

- $a_n = \frac{(0,1)^n}{n}$ é positivo para todo $n > 1$;
- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(0,1)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(0,1)^n} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(0,1)^n}{n} = 0$.

Assim, as hipóteses do teorema 4.33 são verificadas. Logo se R_3 for a diferença entre o valor de $\ln 1,1$ e a soma dos três primeiros termos, então:

$$|R_3| < a_4 = \frac{(0,1)^4}{4} = 0,000025.$$

Assim sendo, a soma dos três primeiros termos fornece um valor para $\ln(1,1)$ com precisão de até pelo menos quatro casas decimais. Usando os três primeiros termos obtemos:

$$\ln(1,1) = 0,1 - \frac{(0,1)^2}{2} + \frac{(0,1)^3}{3} = 0,0953.$$

□

Observação 4.35 A série da exemplo anterior também converge quando $x = 1$.

4.7 Convergência absoluta, Teste da Razão, Teste da Raiz

Definição 4.36 Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é **absolutamente convergente** se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ for convergente. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, mas $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ diverge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é dita **condicionalmente convergente**.

Exemplo 4.37 Mostre que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} - \frac{2}{3^4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{2}{3^n} + \dots$ é absolutamente convergente.

Solução: Considere a série:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{2}{3^n} \right| = \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \dots + \frac{2}{3^n} + \dots$$

Observe que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n}$ é uma série geométrica convergente na qual $|r| = \frac{1}{3} < 1$, logo a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{3^n}$ é absolutamente convergente. $\square$

É possível que uma série seja convergente, mas não absolutamente convergente, como por exemplo a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Por outro lado, se uma série for absolutamente convergente, ela será convergente. Mais precisamente:

Teorema 4.38 (Teste da Convergência Absoluta) Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente, então esta série é convergente e

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|.$$

Demonstração: Como $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$ e como $2 \sum |a_n|$ é convergente, pelo teorema 4.22, $\sum (a_n + |a_n|)$ converge por ser série de termos positivos.

Assim, $\sum a_n = \sum (a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$ é soma de série convergentes, o que implica que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente. $\square$

Exemplo 4.39 Mostre que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ é convergente

Solução: A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ converge, pois $|\cos n| \leq 1$, para todo n . Logo, $\frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, para todo n inteiro positivo. Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma p -série, com $p = 2$, portanto convergente, segue-se pelo teorema 4.22 que $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right|$ é convergente. Assim, a série dada é absolutamente convergente, logo pelo teorema 4.38, a série é convergente. $\square$

O teste da razão mede a taxa de crescimento (ou decrescimento) de uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, com $a_n \neq 0$, examinando-se a razão $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$. Para uma série geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}$, essa taxa é uma constante $\frac{ar^{n+1}}{ar^n} = r$ e a série é convergente se, e somente se, $|r| < 1$. O teste da razão é uma regra poderosa que estende este resultado para uma série qualquer. É geralmente utilizado quando o termo geral da série envolver fatoriais ou k -ésimas potências.

Teorema 4.40 (Teste da Razão) Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série infinita para a qual a_n é não-nulo para todo $n \geq 1$. Então,

- i) se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L < 1$, a série dada é absolutamente convergente;
- ii) se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L > 1$, a série dada é divergente;
- iii) se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L = 1$, o teste é inconclusivo, e temos que usar outro teste para comprovar ou não a convergência da referida série.

Demonstração:

- i) Dado $L < 1$. Seja r um número tal que $L < r < 1$. Então, o número $R = r - L$ é positivo. Como

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow L$$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}$ deve estar a menos de R de L quando n é grande o suficiente, digamos para todo $n \geq N$. Em particular,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + R = r, \quad \text{quando } n \geq N.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} a_{N+1} &< ra_N, \\ a_{N+2} &< ra_{N+1} < r^2 a_N, \\ a_{N+3} &< ra_{N+2} < r^3 a_N, \\ &\vdots \\ a_{N+m} &< ra_{N+m-1} < r^m a_N. \end{aligned}$$

Essas desigualdades mostram que os termos da nossa série, depois do n -ésimo termo, se aproximam de zero mais rapidamente do que os termos em uma série geométrica com razão $r < 1$. Mais precisamente, considere a série $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$, onde $c_n = a_n$ para $n = 1, 2, \dots, N$ e $c_{N+1} = ra_N$, $c_{N+2} = r^2 a_N$, $\dots$, $c_{N+m} = r^m a_N$, $\dots$.

Agora $a_n \leq c_n$ para todo n .

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} c_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1} + a_N + ra_N + r^2 a_N + \dots \\ &= a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1} + a_N(1 + r + r^2 + \dots). \end{aligned}$$

A série geométrica $1 + r + r^2 + \dots$ converge porque $|r| < 1$, então $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ converge.

Como $a_n \leq c_n$, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também converge, pelo teste da comparação.

ii) Dado $1 < L < +\infty$. A partir de algum índice M ,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \text{e} \quad a_M < a_{M+1} < a_{M+2} < \dots$$

Os termos da série não se aproximam de zero quando n se aproxima do infinito, e a série diverge pelo teste do termo geral.

iii) Para as duas séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

o teste da razão tem $L = 1$ como resultado. No entanto, a série harmônica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma p -série com $p > 1$ que é convergente. Neste caso, temos que usar outro teste para avaliar a convergência ou não da série.

□

Exemplo 4.41 Mostre que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{e^n}$ diverge.

Solução: Observe que:

- $a_n = \frac{n!}{e^n} > 0, \forall n \geq 1$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)n! e^n}{e^n e n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{e} = +\infty.$

Portanto, pelo teste da razão a série diverge. □

Exemplo 4.42 Mostre que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+1}{2^n}$ converge.

Solução: Observe que:

- $a_n = \frac{3n+1}{2^n} > 0, \forall n \geq 1$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{3n+4}{2^{n+1}} \right) \left(\frac{2^n}{3n+1} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+4}{6n+2} = \frac{3}{6} < 1$

Portanto, pelo teste da razão a série converge. □

Teorema 4.43 (Teste da Raiz) Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série com $a_n > 0$ para $n \geq 1$ e suponha que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Então:

- a série é **absolutamente convergente** se $L < 1$.
- a série **diverge** se $L > 1$ ou se L é infinito.
- o teste é **inconclusivo** se $L = 1$. E, devemos usar outro teste para analisar a convergência.

Demonstração:

- Se $L < 1$. Tome $r > 0$ suficientemente pequeno de modo que $L + r < 1$. Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, temos $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow L$, por isso, os termos $\sqrt[n]{a_n}$ acabam se aproximando de L a menos de r . Em outras palavras, existe um índice $M \geq N$ tal que

$$\sqrt[n]{a_n} < L + r \quad \text{quando } n \geq M.$$

Daí, segue-se que

$$a_n < (L + r)^n, \quad \text{para } n \geq M.$$

Note agora que $\sum_{n=M}^{+\infty} (L + r)^n$ é uma série geométrica com razão $L + r < 1$, portanto, convergente. Sendo assim, podemos aplicar o teste da comparação e concluir que a série $\sum_{n=M}^{+\infty} a_n$ converge. Como a soma de um número finito de termos tem soma finita, concluímos que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{M-1} + \sum_{n=M}^{+\infty} a_n$$

converge.

ii) Se $1 < L < +\infty$. Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ (ou $= +\infty$), temos para $n > M > 0$, $\sqrt[n]{a_n} > 1$, daí $a_n > 1$. Logo, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0$, portanto a série diverge pelo critério do termo geral.

iii) Se $L = 1$. Novamente, utilizando as séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

podemos constatar que o teste é inconclusivo quando $L = 1$, pois a primeira série diverge e segunda converge, mas em ambos os casos $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1$. Nestes casos, devemos usar outro teste para analisar a convergência.

□

Exemplo 4.44 Analise a convergência das séries:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$

Solução:

a)

- $a_n > 0, \forall n \geq 1$;

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{3^n}} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^3} = \frac{1}{3} < 1$. Mostre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^3} = 1$, usando a regra de L'Hôpital!;

b)

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1.$$

Pelo teorema 4.43 as séries convergem. □

Exemplo 4.45 Mostre que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2}$ diverge.

De fato:

$$\bullet a_n > 0 \quad \forall n \geq 1$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^2} = \frac{2}{1} > 1.$$

Exemplo 4.46 Seja a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, tal que $a_n = \begin{cases} \frac{n}{2^n} & \text{se, } n \text{ é ímpar} \\ \frac{1}{2^n} & \text{se, } n \text{ é par} \end{cases}$

Solução: Observe que:

$$\bullet a_n = \begin{cases} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} & \text{se, } n \text{ é ímpar} \\ \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} & \text{se, } n \text{ é par} \end{cases}$$

Portanto,

$$\bullet \frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{2}.$$

$$\frac{1}{n}$$

Como $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$ é uma forma indeterminada do tipo ∞^0 quando $n \rightarrow \infty$ e mostra-se usando L'Hôpital que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Assim pelo teorema do confronto, temos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1.$$

□

Exercícios 4.47 1. Calcule a soma dos n primeiros números ímpares, isto é,

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1).$$

2. Mostre que a série $\sum_{k=1}^{+\infty} (2k - 1)$ é divergente.

3. Prove que:

$$1 + 4x^2 + 16x^4 + \dots + 4^n x^{2n} + \dots = \frac{1}{1 - 4x^2}, \text{ se } |x| < \frac{1}{2}.$$

4. Verifique se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ é divergente.

5. Considere a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

a) Determine a fórmula para a soma parcial de ordem n , ou seja, s_n .

b) Prove que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

Sugestão: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

6. Determine a geratriz da dízima periódica $3,0525252\ldots$.

7. Verifique a convergência das séries dadas:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+3}{n^2+7}$$

$$(c) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{\ln n}$$

8. Verifique se as séries são convergentes ou divergentes.

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}$$

$$(g) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

$$(c) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

$$(h) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$(d) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

$$(i) \sum_{n=1}^{+\infty} n$$

$$(e) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

9. Use o teste da integral, verificando suas hipóteses, para determinar se a série converge ou diverge.

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3+2n)^2}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n^3}$$

$$(e) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n+7}$$

$$(d) \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

10. Verifique se a série satisfaz as duas condições do teste das séries alternadas e determine se a série converge ou diverge.

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2 + 7}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{2n} + 1}{e^{2n}}$$

$$(e) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{3}{n^2 + 1}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (1 + e^{-n})$$

$$(d) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n}$$

11. Investigue a convergência das séries:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$$

$$(e) \sum_{n=1}^{+\infty} n! e^{-n}$$

$$(i) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \ln n}{2^n}$$

$$(j) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{[2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)](3^n + 1)}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n n!}{(2n)!}$$

$$(g) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n^3 2^n}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n$$

$$(h) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

12. Mostre que nem o teste da razão nem o teste da raiz fornecem informações a respeito da convergência de

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^p} \quad (p \text{ constante}).$$

13. Determine $x > 0$ para que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$ seja convergente.

Capítulo 5

Séries de Potências

Até o momento estudamos apenas séries cujos termos são constantes.

Como exemplo, a série geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots .$$

Neste capítulo trataremos de séries infinitas, cujo termo geral depende também de uma variável x . No estudo de série de potências consideraremos n a partir de 0.

Definição 5.1 Dizemos que a série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

é uma **série de potências** em $x - x_0$, onde x é uma variável e x_0 é uma constante (também chamada **centro da série**).

Exemplo 5.2 A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n} = 1 + \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2^2} + \cdots + \frac{(x-1)^n}{2^n} + \cdots ,$$

é uma série de potências em $x - 1$ centrada em $x_0 = 1$.

Cabe, porém, fazermos algumas considerações:

- (a) $(x - x_0)^0 = 1$, mesmo quando $x = x_0$.
- (b) No caso em que $x_0 = 0$, temos a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.
- (c) As séries de potências podem ser vistas como uma generalização de uma função polinomial.

O objetivo principal no estudo de séries numéricas foi estabelecer critérios que nos permitissem avaliar se uma série converge ou não. São as séries convergentes, em especial as séries de potências convergentes, que têm interesse pois é através delas que é possível estudar importantes funções e suas aplicações dentro da matemática e também em outros ramos do conhecimento.

Quando trabalhamos com séries de potências em x ou em $x - x_0$ interessa-nos saber para quais valores de x a série é convergente.

Definição 5.3 *O conjunto de todos os valores de x para os quais uma série de potências converge é chamado de intervalo (ou região, ou domínio) de convergência da série e vamos indicá-lo por I_C .*

Observe que, se $x = x_0$, então a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x - x_0)^n$ converge para c_0 .

Isto significa que o intervalo I_C é sempre não vazio.

Para a maioria das série de potências é suficiente usar o teste da razão (teorema 4.40) ou o teste da raiz (teorema 4.43) para determinar o conjunto I_C .

Usando uma série de potências convergente da forma $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x - x_0)^n$ e seu intervalo de convergência I_C podemos definir uma função f da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f : I_C &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Observe que da forma como a função f foi definida, a imagem de um elemento $a \in I_C$ é o valor da soma da série obtida quando substituímos x por a na expressão que representa a série, ou seja, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(a - x_0)^n = f(a)$, que é um número real finito pois a série converge em $x = a$.

Exemplo 5.4 *Vamos usar o teste da razão para determinar o intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n5^n}$.*

Solução:

Temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{|x|}{5} \cdot \frac{n}{n+1} \right] = \frac{|x|}{5}.$$

Pelo teste da razão, segue que:

1. A série converge absolutamente quando $\frac{|x|}{5} < 1$.

2. A série diverge quando $\frac{|x|}{5} > 1$.

3. No caso de $\frac{|x|}{5} = 1$, ou seja, $x = \pm 5$, devemos considerar dois casos:

(a) Substituindo $x = 5$ na série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n5^n}$ obtemos a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, que é condicionalmente convergente pelo teste da série alternada (teorema 4.29).

(b) Substituindo $x = -5$ na série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n5^n}$ obtemos a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que é divergente, por se tratar da série harmônica.

Assim, o intervalo de convergência é $I_C = (-5, 5]$. Para visualizar melhor veja o desenho:



□

Teorema 5.5 Dada uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$, em relação à convergência desta séries, existem apenas três casos possíveis:

- (i) A série converge apenas quando $x = x_0$;
- (ii) A série é absolutamente convergente para todo $x \in \mathbb{R}$;
- (iii) Existe um número real R , $R > 0$, tal que a série é absolutamente convergente para todo $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, e é divergente para todo x tal que $|x - x_0| > R$.



Observação 5.6

O número real R dado pelo item (iii) do teorema 5.8 é chamado de **raio de convergência** da série de potências.

Nos itens (i) e (ii) do 5.5, os raios de convergência são 0 e ∞ , respectivamente.

Exemplo 5.7 Considere a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

Solução: Pelo teste da razão, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x|$. Assim:

1. Se $|x| < 1$ a série converge absolutamente;
2. Se $|x| > 1$, então a série é divergente;
3. Se $|x| = 1$, ou seja, $x = \pm 1$ temos:

- (a) Para $x = 1$, obtemos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, que converge pois trata-se de uma série p com $p = 2 > 1$.
- (b) Para $x = -1$, obtemos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, que também é convergente pelo teste da série alternada (teorema 4.29).

Portanto, o intervalo de convergência é $I_C = [-1, 1]$ e o raio de convergência é $R = 1$.

□

Teorema 5.8

- (a) Se uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ é convergente para $x = x_1$, com $x_1 \neq 0$, então ela é absolutamente convergente para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < |x_1|$.
- (b) Se uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ é divergente para $x = x_2$, com $x_2 \neq 0$, então ela é divergente para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| > |x_2|$.

5.1 Propriedades de Séries de Potências

Conforme já havíamos mencionado, uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ pode ser vista como uma função cujo domínio é o intervalo de convergência da série.

Um exemplo importante no estudo de séries de potências é a série de potências geométrica:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n. \quad (5.1)$$

Pelo teste da razão, verificamos que esta série converge quando $|x| < 1$ e converge para a função $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Assim,

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \text{se } |x| < 1. \quad (5.2)$$

Usando a série dada em 5.2 podemos representar outras funções como série de potências. Por exemplo, observe que:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad \text{desde que } |-x| = |x| < 1. \end{aligned}$$

Outro procedimento importante na determinação de novas séries de potências é garantido pelos teoremas que veremos a seguir e consiste em derivar ou integrar funções representadas por séries de potências já conhecidas.

Proposição 5.9 Se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ for uma série de potências com raio de convergência $R > 0$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ também terá R como raio de convergência.

Demonstração: Seja x qualquer número no intervalo aberto $(-R, R)$. Então $|x| < R$. Seleccionamos um número x_1 tal que $|x| < |x_1| < R$. Como $|x_1| < R$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ é convergente. Logo, pelo critério de termo geral, segue que $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n x_1^n = 0$. Daí, como a sequência $(c_n x_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente, segue que ela é limitada, logo existe um número real positivo M tal que

$$|c_n x_1^n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.3)$$

Agora,

$$|n c_n x^{n-1}| = \left| n c_n \frac{x^{n-1}}{x_1^{n-1}} x_1^{n-1} \right| = n \frac{|c_n x_1^n|}{|x_1|} \left| \frac{x}{x_1} \right|^{n-1}.$$

De (5.3) e da equação acima,

$$|n c_n x^{n-1}| \leq n \frac{M}{|x_1|} \left| \frac{x}{x_1} \right|^{n-1}. \quad (5.4)$$

Aplicando o teste da razão à série

$$\frac{M}{|x_1|} \sum_{n=1}^{\infty} n \left| \frac{x}{x_1} \right|^{n-1} \quad (5.5)$$

obtemos que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)|x|^n |x_1|^{n-1}}{|x_1|^n n|x|^{n-1}} \right| = \left| \frac{x}{x_1} \right| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = \left| \frac{x}{x_1} \right| < 1.$$

Daí, a série (5.5) é absolutamente convergente; logo, de (5.4) e do teste da comparação (teorema 4.22), segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ também é absolutamente convergente. Como x é qualquer número em $(-R, R)$, segue que se o raio de convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ for R' , então $R' \geq R$.

Para completar a demonstração, precisamos mostrar que R' não pode ser maior que R . Vamos supor $R' > R$ e seja x_2 um número tal que $R < |x_2| < R'$. Como $|x_2| > R$, segue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_2^n \quad \text{é divergente.} \quad (5.6)$$

Como $|x_2| < R'$, segue que $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x_2^{n-1}$ é absolutamente convergente. Além disso,

$$|x_2| \sum_{n=1}^{\infty} |n c_n x_2^{n-1}| = \sum_{n=1}^{\infty} |n c_n x_2^n|$$

e assim, do Teorema 4.15

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n c_n x_2^n| \quad \text{será convergente.} \quad (5.7)$$

Se n for qualquer inteiro positivo,

$$|c_n x_2^n| \leq n |c_n x_2^n| = |n c_n x_2^n|.$$

Dessa desigualdade, da afirmação 5.7 e do teste da comparação, segue que $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n x_2^n|$ é convergente. Logo, a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_2^n$ é convergente, o que contradiz o resultado 5.6. Assim sendo, a hipótese de que $R' > R$ é falsa. Logo, R' não pode ser maior do que R ; e como foi mostrado que $R' \geq R$, segue que $R' = R$, o que prova o teorema. $\square$

Proposição 5.10 *Se o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ for $R > 0$, então o raio de convergência da série $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$ também será R .*

Demonstração: Basta aplicarmos a proposição 5.9 à série $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ e obteremos o resultado desejado. $\square$

Teorema 5.11 (*Derivação Termo a Termo*) Seja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ uma série de potências cujo raio de convergência é $R > 0$ e seja f a função definida por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad (5.8)$$

Então sua derivada, $f'(x)$, existirá para todo x no intervalo aberto $(-R, R)$ e será dada por:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}.$$

Exemplo 5.12 O resultado acima é útil, por exemplo, para obter uma representação em série de potências da função $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$.

Solução: Já vimos que:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \quad \text{se } |x| < 1.$$

Trocando x por $-x^2$ na igualdade acima, obtemos:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots \quad \text{se } |x| < 1.$$

Multiplicando a última igualdade por $-\frac{1}{2}$, temos:

$$-\frac{1}{2(1+x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2} x^{2n} = -\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} - \cdots - (-1)^{n+1} \frac{1}{2} x^{2n} + \cdots \quad \text{se } |x| < 1. \quad (5.9)$$

Utilizando o teorema 5.11, ao derivarmos (5.9) obtemos

$$\frac{x}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n-1}.$$

□

Exemplo 5.13 Mostre que para todos os valores reais de x :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

Solução: A série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ é absolutamente convergente para todos os valores reais de x . Seja f a função definida por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (5.10)$$

o domínio de f será o conjunto de todos os números reais; isto é, o intervalo de convergência será $(-\infty, +\infty)$. Segue do teorema 5.11, que para todos os valores reais de x temos:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!}.$$

Uma vez que $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$, isso pode ser escrito como

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \iff f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Dessa igualdade e de (5.10), $f'(x) = f(x)$ para todos os valores reais de x . Assim sendo, a função f satisfaz a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = y$, cuja solução geral é $y = f(x) = Ce^x$. Da equação (5.10), $f(0) = 1$. (Lembre-se que estamos tomando $x^0 = 1$ mesmo que $x = 0$, por convenção, ao escrever o termo geral.) Portanto, $C = 1$ e assim $f(x) = e^x$ e temos o resultado desejado. $\square$

Exemplo 5.14 Use o resultado do exemplo 5.13 para achar uma representação em série de potências de e^{-x} .

Solução: Basta substituírmos x por $-x$ na série de e^x . Assim:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

para todos os valores reais de x . $\square$

O teorema a seguir, que é uma consequência do teorema 5.11, estabelece em que condições é possível integrarmos termo a termo uma série de potências.

Teorema 5.15 (*Integração Termo a Termo*) Seja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ uma série de potências cujo raio de convergência é $R > 0$. Então, se f for a função definida por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

f será integrável em todo subintervalo fechado de $(-R, R)$ e calculamos a integral de f integrando termo a termo a série de potências dada; isto é, se x está em $(-R, R)$, então

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Além disso, o raio de convergência da série resultante é R .

Observação 5.16 Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ uma série de potências cujo raio de convergência é $R > 0$. Embora o raio de convergência de f , f' e de $\int f(t)dt$ seja o mesmo, os intervalos de convergências podem ser diferentes e que esta diferença, quando existe, ocorre nos extremos do intervalo de convergência.

Exemplo 5.17 Identifique a função f cuja representação em série de potências é dada por:

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (5.11)$$

Solução: Derivando a série dada, termo a termo, obtemos:

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \quad -1 < x < 1. \quad (5.12)$$

Esta é uma série geométrica cujo primeiro termo é 1 e a razão é $-x^2$. Observe que $|-x^2| < 1$ (ou seja, $-1 < x < 1$), logo a série dada pela equação 5.12 é convergente e converge para $\frac{1}{1 - (-x^2)}$. Daí,

$$f'(x) = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Integrando $f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$, obtemos:

$$\int f'(x)dx = \int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + C.$$

Note que, por 5.11, $f(0) = 0$, assim $C = 0$. Assim, obtemos:

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \arctan x, \quad -1 < x < 1.$$

Observe que a série também converge em $x = \pm 1$, mas esta verificação deve ser analisada à parte, pois o teorema 5.15 só garante a convergência da série no interior do intervalo aberto.

□

Exemplo 5.18 Determine uma representação em série de potências para $f(x) = \ln(1+x)$ com $-1 < x < 1$.

Solução:

A função $\frac{1}{1+x}$ é representada pela série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, ou seja:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \quad \text{para } -1 < x < 1.$$

Consequentemente, pelo teorema 5.15, temos que:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^x \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1. \end{aligned}$$

□

Observe que a série que define $\ln(1+x)$ é convergente também em $x = 1$ (Verifique!).

5.2 Séries de Taylor

Na seção anterior vimos que quando $|x| < 1$, a função $\frac{1}{1-x}$ pode ser escrita como a série geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. É importante lembrar que a partir desta série é possível obter a representação em série de potências de várias outras funções.

Tal afirmação nos leva a um questionamento: será que qualquer função pode ser representada como uma série de potências? Posteriormente veremos que, em geral, a resposta é negativa e, mesmo aquelas funções para as quais isto é possível, algumas condições devem ser satisfeitas para que isso ocorra.

Suponhamos que uma função f qualquer, cujo domínio é o intervalo aberto $I = (x_0 - R, x_0 + R)$, seja definida por uma série de potências, isto é, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - x_0)^n$. O próximo resultado nos diz como determinar os coeficientes c_n 's.

Proposição 5.19 *Seja f uma função infinitamente derivável no intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$, onde $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - x_0)^n$. Então:*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

onde $f^{(n)}$ é a derivada de ordem n da função f e $f^{(0)} = f$.

Calculando as derivadas de ordem $0, 1, 2, \dots, n, \dots$, da função f , obtemos:

$$\begin{aligned}
f(x) &= c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + \cdots \\
f'(x) &= c_1 + 2 \cdot c_2(x - x_0) + 3 \cdot c_3(x - x_0)^2 + \cdots + n \cdot c_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots \\
f''(x) &= 2 \cdot c_2 + 2 \cdot 3 \cdot c_3(x - x_0) + \cdots + n \cdot (n-1) \cdot c_n(x - x_0)^{n-2} + \cdots \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= n! \cdot c_n + (n+1)n(n-1) \cdots 2c_{n+1}(x - x_0) + \cdots
\end{aligned}$$

Calculando os valores de $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $\dots$, $f^{(n)}(x_0)$, obtemos:

$$c_0 = f(x_0), c_1 = f'(x_0), c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \dots, c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \dots$$

Daí:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n.$$

Definição 5.20 Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função infinitamente derivável em $x_0 \in I$, então a **Série de Taylor** de f em x_0 é dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n.$$

No caso em que $x_0 = 0$, a série é chamada **Série de Maclaurin** da função f e é representada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Observação 5.21 O intervalo de convergência I_C da série de Taylor (ou de Maclaurin) de uma função f é um subconjunto do intervalo I da definição acima.

Exemplo 5.22 Determine a série de Taylor da função $f(x) = \frac{1}{x}$ em torno de $x_0 = 2$, e verifique se a série de Taylor converge para $f(x)$.

Solução: Observe que:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{-1} \implies f(2) = 2^{-1} = \frac{1}{2} \\
f'(x) &= -x^{-2} \implies f'(2) = -\frac{1}{2^2} \\
f''(x) &= 2!x^{-3} \implies \frac{f''(2)}{2!} = \frac{1}{2^3} \\
f'''(x) &= -3!x^{-4} \implies \frac{f'''(2)}{3!} = -\frac{1}{2^4} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n n! x^{-(n+1)} \implies \frac{f^{(n)}(2)}{n!} = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

Logo, a série de Taylor de f em torno de $x_0 = 2$ é dada por:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!} (x-2)^n = \\ &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n + \cdots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} - \cdots + (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}} + \cdots \end{aligned}$$

Esta é uma série geométrica com primeiro termo $\frac{1}{2}$ e razão $r = -\frac{x-2}{2}$. Pelo teste da razão a série converge absolutamente desde que $|x-2| < 2$, e sua soma é

$$\frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{(x-2)}{2}} = \frac{1}{2 + (x-2)} = \frac{1}{x}.$$

Neste exemplo, a série de Taylor de $f(x) = \frac{1}{x}$ em torno de $x_0 = 2$ converge para a própria função desde que $|x-2| < 2$, ou seja, $0 < x < 4$. $\square$

Observação 5.23 *O exemplo acima é um caso particular onde a série de Taylor da função converge para a própria função. Mas este tipo de comportamento não é geral. Veremos em que condições a série de Taylor de uma função converge para a própria função no teorema de Taylor.*

Exemplo 5.24 *Determine a série de Maclaurin de $f(x) = e^x$.*

Solução: Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo x real e para todo n natural. Logo $f^{(n)}(0) = 1$ para todo n . Assim, a série de Maclaurin é dada por:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (5.13)$$

$\square$

Definição 5.25 *A soma parcial de ordem n da série de Taylor de uma função f é chamada de **Polinômio de Taylor de ordem n** , que denotamos por $P_n(x)$, e é definido por:*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k.$$

Exemplo 5.26 Determine a série de Maclaurin e o polinômio de Taylor de ordem n para a função $f(x) = \cos x$.

Solução: Observe que:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x & f'(x) = -\operatorname{sen} x \\ f''(x) = -\cos x & f'''(x) = \operatorname{sen} x \\ \vdots & \vdots \\ f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x & f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \operatorname{sen} x \end{array}$$

Como $\cos(0) = 1$ e $\operatorname{sen}(0) = 0$, então:

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n \quad \text{e} \quad f^{(2n+1)}(0) = 0.$$

Desta forma, a série de Maclaurin de f , é:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ &= 1 + 0 \cdot x - \frac{x^2}{2!} + 0 \cdot x^3 + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \end{aligned}$$

Como $f^{(2n+1)}(0) = 0$, os polinômios de Taylor de ordem $2n$ e $2n+1$ são idênticos:

$$P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

□

A seguir apresentamos as condições para que a série de Taylor de uma função f convirja para f (em geral, isso nem sempre é possível).

Teorema 5.27 (Fórmula de Taylor) Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que possui derivadas de todas as ordens em I e que contém x_0 . Então, para todo $x \in I$ temos:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

onde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

para algum $c \in (x_0, x)$.

Se, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ para todo $x \in I$, dizemos que a série de Taylor da função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ em $x = x_0$ converge para f em I .

Exemplo 5.28 Use o teorema 5.27 para mostrar que a série de Maclaurin para e^x , encontrada no exemplo 5.24, representa a função para todos os valores de x .

Solução: A série de Maclaurin para e^x é obtida no exemplo (5.24) e

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

onde cada ξ_n está entre 0 e x .

Precisamos mostrar que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$ para todo x . Há três casos a considerar: $x > 0$, $x < 0$ e $x = 0$.

Se $x > 0$, então $0 < \xi_n < x$, logo $e^{\xi_n} < e^x$. Assim:

$$0 < \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!} x^{n+1} < e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (5.14)$$

Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, para todo x , segue que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Daí, $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

Logo, de (5.14) e pelo teorema do confronto, segue que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$.

Se $x < 0$, então $x < \xi_n < 0$ e $0 < e^{\xi_n} < 1$. Temos dois casos a considerar:

(a) se $x^{n+1} > 0$,

$$0 < \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!} x^{n+1} < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(b) Se $x^{n+1} < 0$,

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!} x^{n+1} < 0.$$

Em ambos os casos, como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, concluímos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$.

Finalmente, se $x = 0$, a série tem soma 1, que é e^0 . Logo a série (5.24) representa e^x para todos os valores de x .

Assim, para todo $x \in \mathbb{R}$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \end{aligned}$$

□

5.2.1 Aplicações das Séries de Potências - Série Binomial

Uma aplicação para as séries de potências está em encontrar a série binomial de uma função. A série de Maclaurin da função $f(x) = (1+x)^m$ é conhecida como a série Binomial para f . Observe que a série de Maclaurin desta função converge (absolutamente) para $f(x)$, desde que $|x| < 1$, ou seja:

$$f(x) = (1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots (m-n+1)x^n}{n!}.$$

Exercícios 5.29 1. Obtenha uma representação em série de potências para a função

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}.$$

2. Verifique que a série $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{nx}$ converge para $x = -1$. Tal série converge absolutamente para todo $x \in]-1, 1[$? Explique.

3. Considere a série de potências, centrada em x_0 , $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Suponha que tal série convirja para $x = x_1$, $x_1 \neq x_0$. Mostre que a série converge absolutamente para todo $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$, onde $r = [x_1 - x_0]$.

4. Determine quais das séries a seguir são convergentes. Para aquelas que são convergentes, determine quais são absolutamente convergentes e quais são condicionalmente convergentes.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n3^n}$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}3^n}$$

$$(d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

$$(e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n^2+3}}$$

$$(f) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(\ln n)^2}$$

$$(g) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln n}$$

$$(h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n(n^2+1)}$$

$$(j) \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[n]{n}(2x+5)^n$$

$$(k) \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n(n+1)(x-1)^n$$

$$(l) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$(m) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(3n)!} \cdot (x-2)^n$$

$$(n) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)(x-2)^n}{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)2^n}$$

5. Expresse $\sqrt[4]{1+x}$ como uma série de potências.

6. Para quais valores de x a série

$$1 - \frac{1}{2}(x-3) + \frac{1}{4}(x-3)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-3)^n + \cdots$$

converge? Qual é a sua soma? Qual série você obtém se derivar a série dada termo a termo? Para quais valores de x a nova série converge? Qual é a sua soma?

7. A série $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$, converge para $\sin x$ para todo x real. Resolva os itens a seguir:

- Encontre os seis primeiros termos de uma série para $\cos x$. Para quais valores de x a série obtida deve convergir?
- Substituindo x por $2x$ na série que representa a função $\sin x$, encontre uma série que convirja para $\sin 2x$ para todo x .
- Usando o resultado do item a) e a multiplicação de séries, calcule os seis primeiros termos de uma série para $2\sin x \cos x$. Compare seu resultado com a resposta do item b).

8. Suponha $|x| < r$, $r > 0$ e que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n r^n = 0$. Prove que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n x^n = 0$.

9. Prove que as séries de potência $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ têm o mesmo raio de convergência.

10. Encontre o polinômio de Taylor de ordens 0, 1, 2 e 3 gerados por f em a .

(a) $f(x) = \ln x$, $a = 1$

(c) $f(x) = \sqrt{x+4}$, $a = 0$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 2$

(d) $f(x) = \frac{1}{x+2}$, $a = 0$

11. Encontre a série de Taylor gerada por f em $x = a$.

(a) $f(x) = x^3 - 2x + 4$, $a = 2$

(c) $f(x) = e^x$, $a = 2$

(b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $a = 1$

(d) $f(x) = \frac{x}{1-x}$, $a = 0$

12. Encontre a série de Maclaurin para as funções.

(a) $f(x) = e^x$

(c) $f(x) = (x+1)^2$

(b) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

(d) $f(x) = 7 \cos(-x)$

Referências Bibliográficas

- [1] W. Boyce and R. C. Di Prima, *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Editora LTC, 5ª edição, 1994.
- [2] M. P. Matos, *Séries e equações diferenciais*. Editora Prentice Hall, 1ª edição, 2002.
- [3] L Leithold, *O Cálculo com Geometria Analítica*. Editora Harbra, Vols 1 e 2, 3ª edição, 1994.
- [4] D. G. Figueiredo e A. F. Neves, *Equações Diferenciais Aplicadas*. Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2012.
- [5] R. Bronson, *Equações Diferenciais*. Editora Makron Books, 2ª edição, 1994.

Índice Remissivo

- Axioma
 - do completamento, 30
- Critério
 - da Comparação para Sequências Divergentes, 29
- critério
 - do termo geral, 44
- função
 - posição, 23
- Intervalos Encaixantes, 35
- limite, 25
- Número de Ouro, 36
- Polinômio de Taylor, 78
- Série
 - absolutamente convergente, 58
 - condicionalmente convergente, 58
- série
 - geométrica, 41
 - telescópica, 45
- séries, 39
- Sequência
 - crescente, 29
 - de Fibonacci, 35
 - de números, 23
 - decrescente, 29
 - estritamente crescente, 29
 - estritamente decrescente, 29
 - limitada, 30
 - limitada inferiormente, 30
 - limitada superiormente, 30
 - limite de uma, 25
 - recursiva, 35
 - termo geral, 23
- sequência, 23
 - convergente, 26
 - divergente, 26
- sequências
 - iguais, 24
- somas parciais
 - sequência, 39
- subsequência, 32
- Teorema
 - da convergência monótona, 30
 - derivação termo a termo, 73
 - do confronto para sequências, 28
 - do resto para Séries Alternadas, 57
 - Fórmula de Taylor, 79
- Teste
 - da série alternada, 55
- teste
 - da convergência absoluta, 58