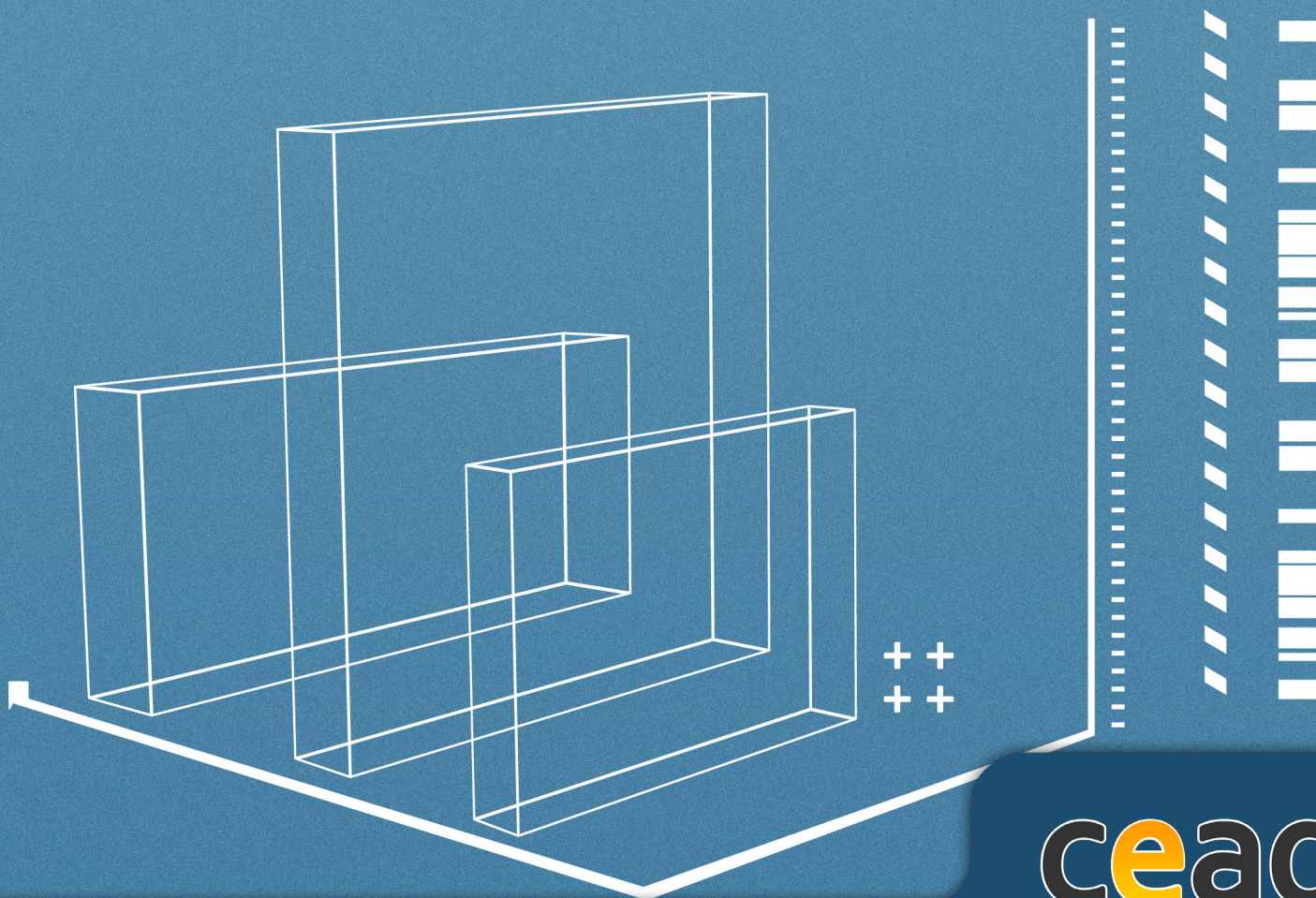
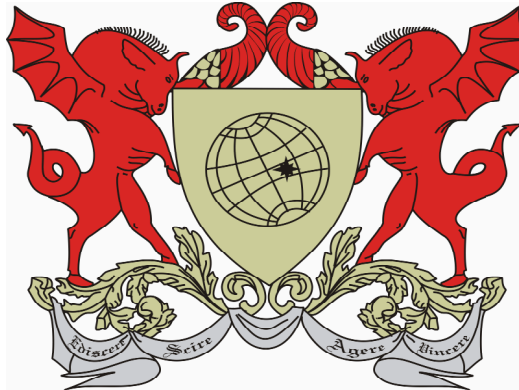




GABRIELA LUCHEZE DE OLIVEIRA LOPES
JAQUES SILVEIRA LOPES

GEOMETRIA ANALÍTICA





Universidade Federal de Viçosa

Reitora

Nilda de Fátima Ferreira Soares

Vice-Reitor

Demetrius David da Silva

Conselho Editorial

Andréa Patrícia Gomes

João Batista Mota

José Benedito Pinho

José Luiz Braga

Tereza Angélica Bartolomeu



Coordenadoria de
Educação Aberta e a Distância

Diretor

Frederico Vieira Passos

*Prédio CEE, Avenida PH Rolfs s/n
Campus Universitário, 36570-000, Viçosa/MG
Telefone: (31) 3899 2858 | Fax: (31) 3899 3352*

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e
Classificação da Biblioteca Central da UFV**

L864g
2012

Lopes, Gabriela Lucheze de Oliveira, 1974-
Geometria analítica [recurso eletrônico] / Gabriela Lucheze
de Oliveira Lopes, Jaques Silveira Lopes. – Viçosa, MG :
UFV/CEAD, 2012.

148p. : il. (algumas col.) ; 29cm. (Conhecimento, ISSN
2179-1732; n.2)

Livro eletrônico.
Bibliografia p. 148

1. Geometria analítica. I. Lopes, Jaques Silveira, 1975-
II. Universidade Federal de Viçosa. Coordenadoria de
Educação Aberta e a Distância. III. Título.

CDD 22. ed. 516.3

CEAD - Coodenadoria de Educação Aberta e a Distância
Frederico Vieira Passos - Diretor

ISSN 2179-1732; n.2

LOPES, Gabriela e LOPES, Jaques - Geometria Analítica. Viçosa - MG: UFRV/CEAD, 2012.

Layout: Diogo Rodrigues

Capa: Daniel Fardin

Gráficos e imagens: Bráulia Aparecida A. Perázio

Editoração Eletrônica: Diogo Rodrigues

Revisão Final: João Batista Mota

SUMÁRIO

7	O PLANO
24	PARÁBOLA
35	ELIPSE
45	HIPÉRBOLE
54	VETORES
80	PRODUTO ESCALAR
88	PRODUTO VETORIAL
99	RETAS
108	PLANOS NO ESPAÇO
113	ÂNGULOS
120	DISTÂNCIAS NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL
132	SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Prefácio

Este texto foi idealizado para servir de referência na disciplina de Geometria Analítica do Curso de Licenciatura em Matemática – Modalidade a Distância – da Universidade Federal de Viçosa. Em função disto ele é basicamente um guia no que se refere aos conceitos básicos da Geometria Analítica, que são fundamentais na compreensão de teorias mais avançadas nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

O trabalho de confecção do material foi bastante árduo, pois considerou as características de construção de um curso que é oferecido a distância, mas que preserva a qualidade do curso presencial ofertado pela UFV.

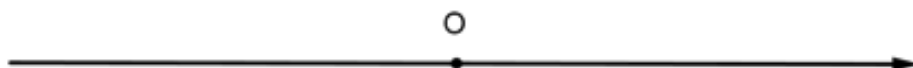
O material aqui desenvolvido terá, na UFV, o suporte e a complementação de outras mídias disponibilizadas na plataforma de interação PVANet, que é um ambiente virtual de aprendizagem. Além do PVANet, a disciplina contará com todos os elementos que esta modalidade de ensino exige: tutores presenciais e a distância; coordenadores de polos; professores coordenadores de disciplinas; coordenador de tutores; comissão coordenadora de curso etc.

A produção do material contou com o importante apoio da equipe de tutores do Curso e vale a pena deixar registrado o agradecimento a Bráulia Aparecida de Almeida Perázio, Frederico Ventura Batista, Isaque Viza de Souza e Marcos Barros.

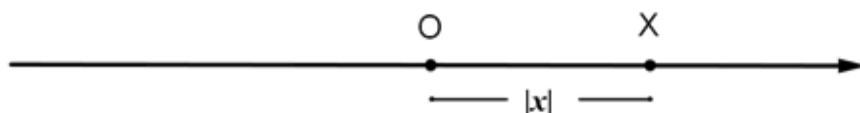
Especificamente sobre o texto produzido, dividimos os conceitos em módulos, que representam, de certa maneira, as semanas de aula da disciplina. Começamos o material explorando a ideia primária da Geometria Analítica plana, que consiste em estabelecer uma correspondência entre pontos do plano e pares ordenados de números reais, tornando possível uma correspondência entre curvas do plano e equações de duas variáveis. Assim transferimos uma investigação geométrica para outra investigação algébrica correspondente. Passamos pelo estudo de parábolas, elipses, hipérboles, retas, vetores, propriedades dos vetores etc, e finalizamos o texto abordando o conceito de Geometria Analítica no espaço.

O Plano

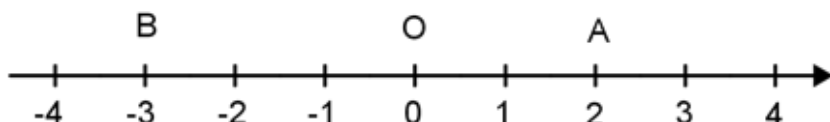
Nosso estudo começa pela idéia de que os pontos de uma reta orientada estão em correspondência biunívoca com os números reais. Um eixo é uma reta orientada na qual fixamos um ponto O e o referimos a ele como origem do eixo:



Para determinar a correspondência biunívoca dos pontos deste eixo com os números reais, colocaremos o ponto O do eixo em correspondência com o número real zero. Fixando uma unidade de medida, associamos a cada ponto X do eixo a um número real x tal que a distância de X a O é $|x|$, e de tal forma que se X está à direita de O , então x é positivo e se X está à esquerda de O , então x é negativo.



Denotando a distância entre os pontos O e X do eixo por $d(O,X)$, observe que:

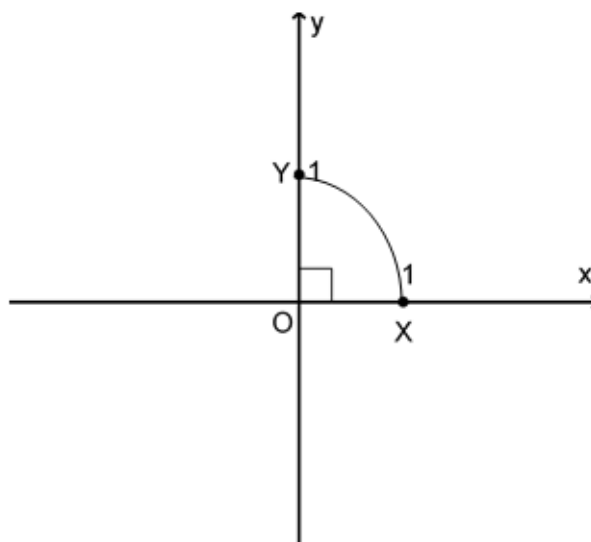


O ponto A do eixo está à direita de O e em correspondência com o número real positivo 2 de tal forma que $d(O,A)=2$. O ponto B do eixo está à esquerda de O e em correspondência com o número real negativo -3 de tal forma que:

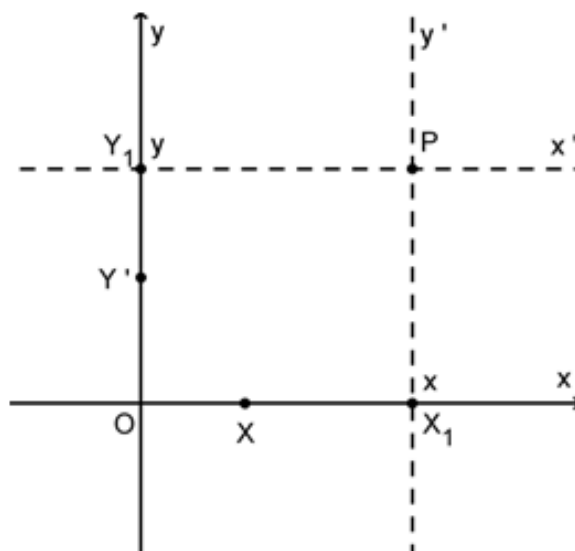
$$d(O,B) = |-3|=3.$$

Coordenadas no Plano

A geometria espacial nos diz que duas retas que se interceptam determinam um plano. Consideremos o plano definido pelo par de eixos perpendiculares x e y , conforme a figura a seguir:



Note que as origens dos dois eixos x e y coincidem. Tomemos a unidade OX igual OY e seja P um ponto qualquer do plano. Traçando-se a única reta paralela x' ao eixo x , passando pelo ponto P notamos que x' intercepta o eixo y no ponto Y_1 . Traçando-se a única reta paralela y' ao eixo y , passando pelo ponto P notamos que y' intercepta o eixo x no ponto X_1 . Veja a seguir:



Seja x o número real correspondente ao ponto X_1 do eixo x e y o número real correspondente ao ponto Y_1 do eixo y . O que notamos é que os **números** x e y determinam univocamente, o **ponto** P .

Observe que dados os números reais x e y , podemos determinar pontos X e Y sobre os eixos x e y , respectivamente, e traçar as paralelas x' e y' , assim a interseção destas paralelas é o ponto P .

Usaremos a notação $P(x,y)$ para denotar um ponto do plano. Os números x e y constituem as coordenadas de P e são chamados de **abscissa** e **ordenada** respectivamente. Dessa forma estabelecemos uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e o conjunto de pares ordenados de números reais (x,y) . O que acabamos de construir é chamado de **sistema de coordenadas**.

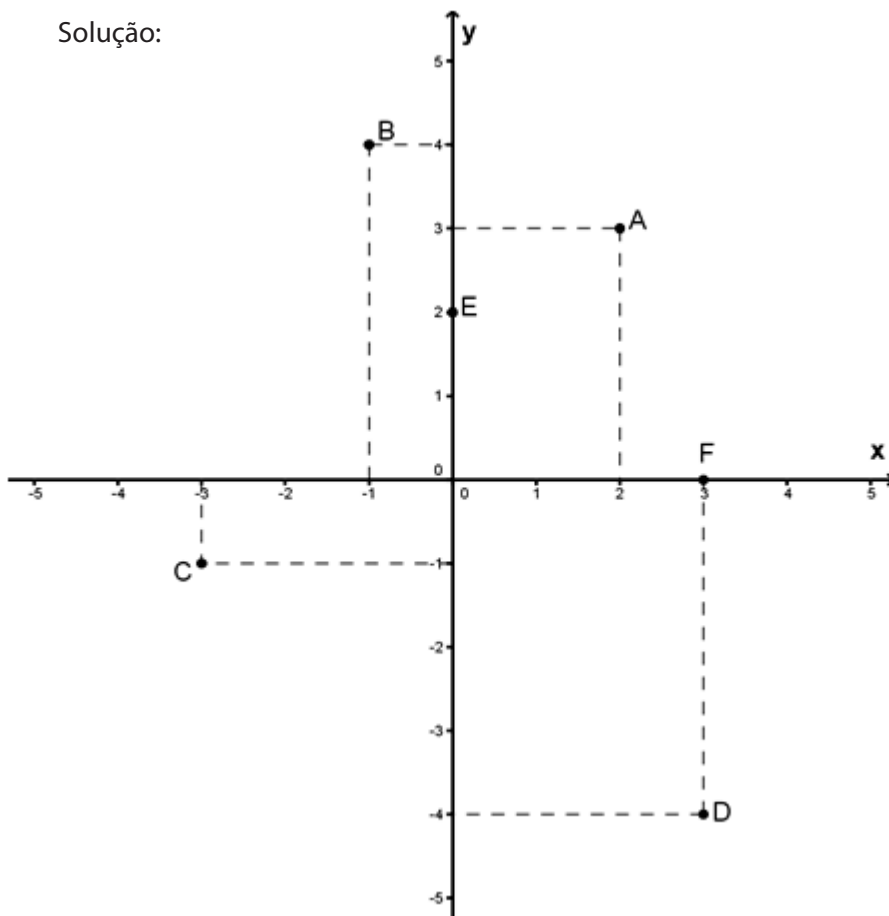
Os eixos dividem o plano em quatro regiões, chamadas quadrantes. Veja a figura a seguir:



Exemplo 1:

A geometria espacial nos diz que duas retas que se interceptam determinam um plano. Consideremos o plano definido pelo par de eixos perpendiculares x e y , conforme a figura a seguir:

Solução:



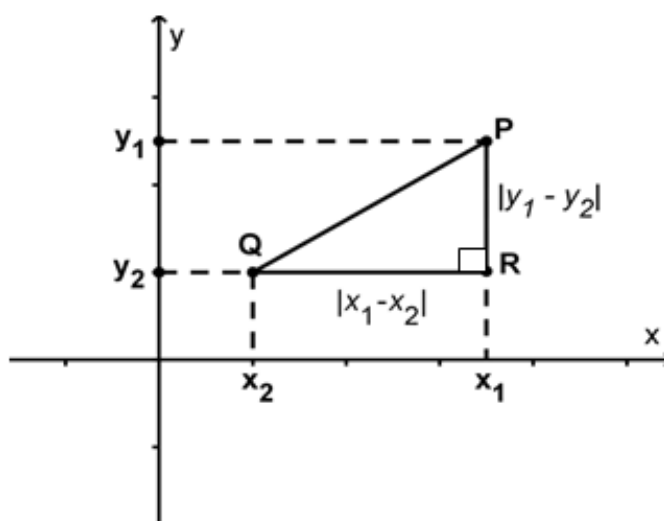
Atividade I:

- 1) Como são as coordenadas dos pontos que estão sobre o eixo x?
- 2) Como são as coordenadas dos pontos que estão sobre o eixo y?
- 3) A posição de um ponto $P(x,y)$ em um plano xy estabelece o sinal de suas coordenadas. Complete o quadro abaixo:

	1º Quadrante	2º Quadrante	3º Quadrante	4º Quadrante
Abscissa	Positiva	Negativa		Positiva
Ordenada	Positiva			Negativa

Distância entre dois pontos

Sejam os pontos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ do plano, traçando-se a paralela por P ao eixo x e a paralela por Q ao eixo y obtemos o ponto de interseção R. Os pontos P, Q e R determinam um triângulo retângulo em R, cujas medidas são dos catetos são $|x_1 - x_2|$ e $|y_1 - y_2|$ como na figura abaixo:



Pelo teorema de Pitágoras, a medida da hipotenusa é $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ e esse número é a distância de P a Q e usaremos a notação $d(P,Q)$, isto é,

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Atividade II:

1) Dados dois pontos $P(x_1, 0)$ e $Q(x_2, 0)$, de modo que o segmento PQ seja paralelo ao eixo x , mostre que a distância de P até Q é dada por $d(P, Q) = |x_1 - x_2|$.

2) Dados dois pontos $P(0, y_1)$ e $Q(0, y_2)$ de modo que o segmento PQ seja paralelo ao eixo y , mostre que a distância de P até Q é dada por $d(P, Q) = |y_1 - y_2|$.

Exemplo 2:

Calcule a distância entre os pontos $A(2, -1)$ e $B(-3, 4)$.

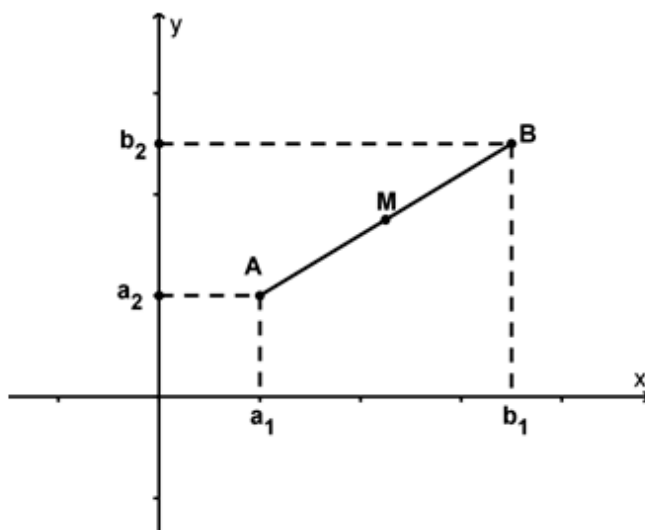
Solução:

$$d(A, B) = \sqrt{[2 - (-3)]^2 + [(-1) - 4]^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Ponto médio de um segmento

Para determinar as coordenadas do ponto médio M de segmento AB cujas extremidades são $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ façamos o seguinte:



Pela definição de ponto médio temos que

$$d(A, M) = d(B, M)$$

Supondo $M(x, y)$; podemos escrever:

$$\sqrt{(a_1 - x)^2 + (a_2 - y)^2} = \sqrt{(b_1 - x)^2 + (b_2 - y)^2}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros:

$$(a_1 - x)^2 + (a_2 - y)^2 = (b_1 - x)^2 + (b_2 - y)^2$$

Desenvolvendo e organizando

$$[a_1^2 - b_1^2 - 2x(a_1 - b_1)] + [a_2^2 - b_2^2 - 2y(a_2 - b_2)] = 0$$

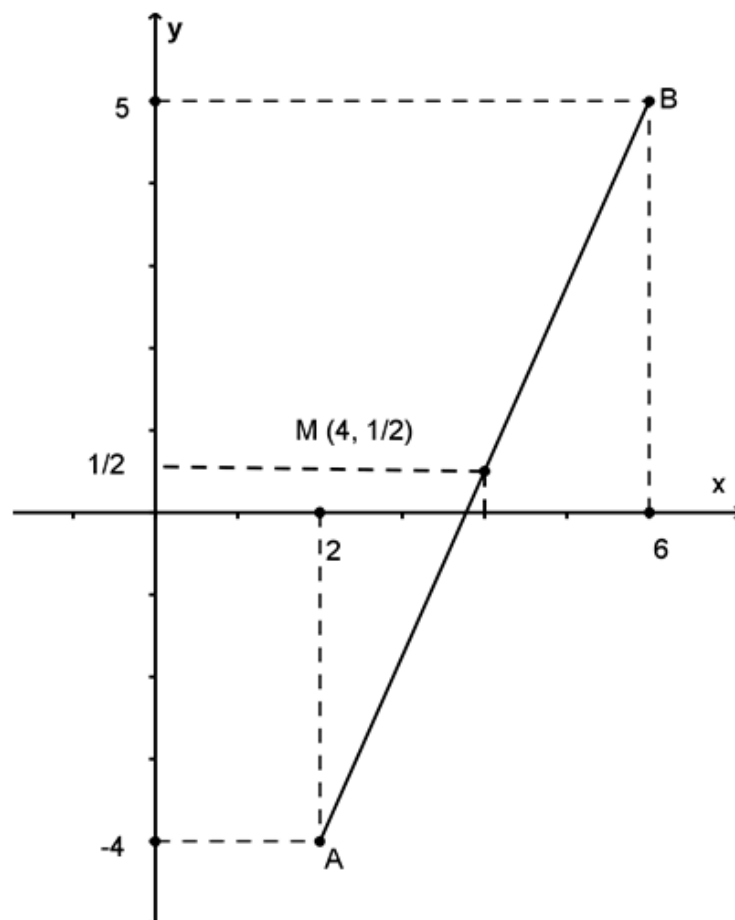
Como $x = (a_1 + b_1) / 2$ e $y = (a_2 + b_2) / 2$ satisfazem a equação e, as coordenadas de um ponto são únicas, o ponto médio do segmento AB é:

$$M \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right).$$

Exemplo 3:

Quais são as coordenadas do ponto médio do segmento cujas extremidades são A(2,-4) e B(6,5)?

Solução:



Como o ponto médio é $M\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$, temos:

$$M\left(\frac{2+6}{2}, \frac{-4+5}{2}\right), \text{ daí}$$

$$M\left(4, \frac{1}{2}\right).$$

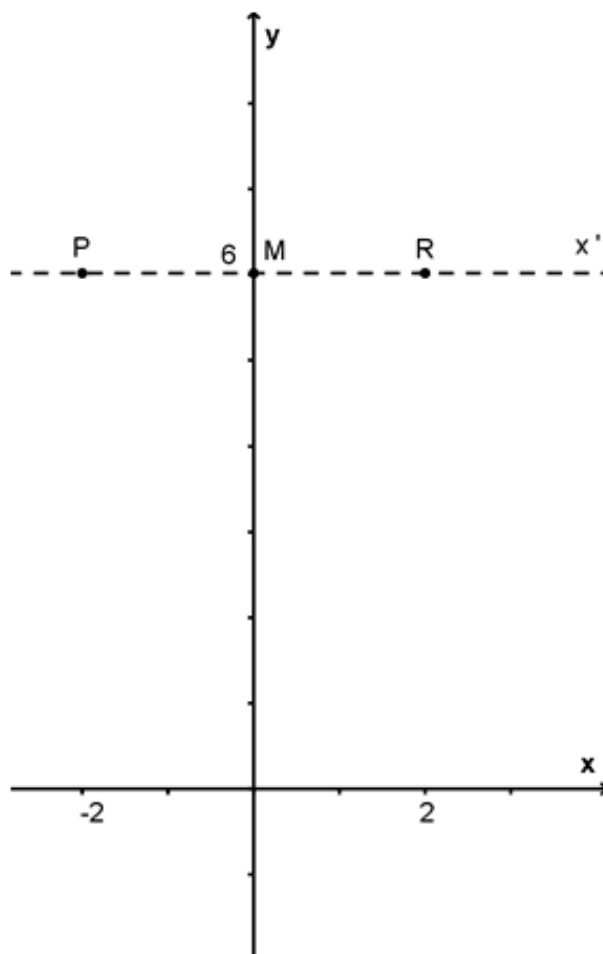
Exemplo 4:

Dado ponto $P(-2,6)$, qual é o seu simétrico em relação ao eixo y ?

Solução:

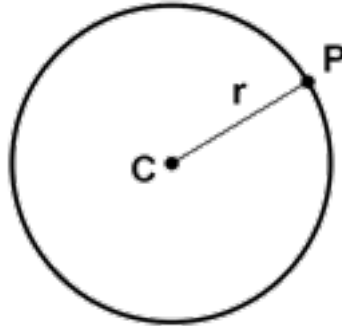
Para encontrar o simétrico do ponto P em relação ao eixo y : trace a reta paralela x' ao eixo x , passando pelo ponto P . Essa reta intercepta o eixo y no ponto M . O simétrico do ponto em relação ao eixo y é o ponto R tal que M é o ponto médio do segmento PR .

Disso, sendo $M(0,6)$ e supondo $R(x,y)$, $M(0,6) = M\left(\frac{(x-2)}{2}, \frac{(y+6)}{2}\right)$ e podemos fazer $(x-2)/2=0$ e $(y+6)/2=6$, obtendo $x=2$ e $y=6$. Assim, o simétrico do ponto P em relação ao eixo y é $R(2,6)$.



Circunferência

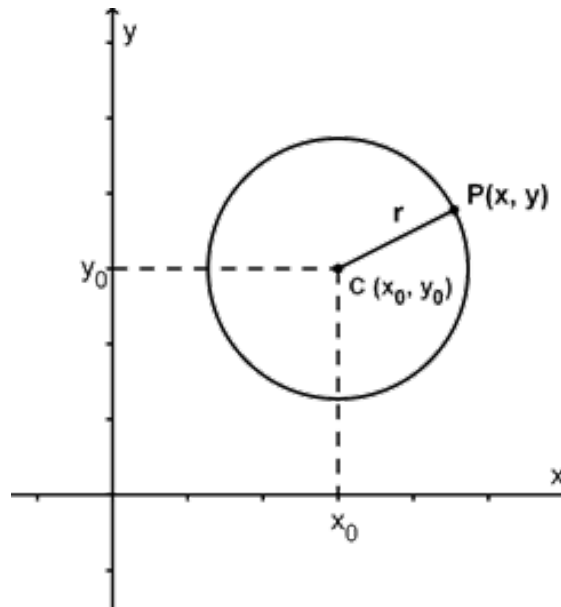
Dado um ponto C de um plano e um número real positivo r , circunferência de centro C e raio r é o conjunto dos pontos do plano cuja distância ao ponto C é r .



Por definição, um ponto P pertence à circunferência de centro C e raio r , se, e somente se, $d(P,C) = r$.

Equação da Circunferência

Considere em um sistema de coordenadas um ponto $C(x_0, y_0)$. Vamos encontrar uma equação para a circunferência de centro $C(x_0, y_0)$ e raio r .



Um ponto $P(x,y)$ pertence à circunferência de centro $C(x_0, y_0)$ e raio r , se somente se, $d(P,C)=r$
ou

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, podemos escrever

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

e esta é denominada **equação da circunferência** de centro $C(x_0, y_0)$ e raio r .
Desenvolvendo e organizando podemos escrever essa equação da seguinte forma:

$$x^2 + y^2 - 2x_0 x - 2y_0 y + (x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0$$

Exemplo 5:

Determine a equação da circunferência de centro $C(3, -2)$ e raio 2

Solução:

Substituindo x_0, y_0 e r por 3, -2 e 2 respectivamente na equação

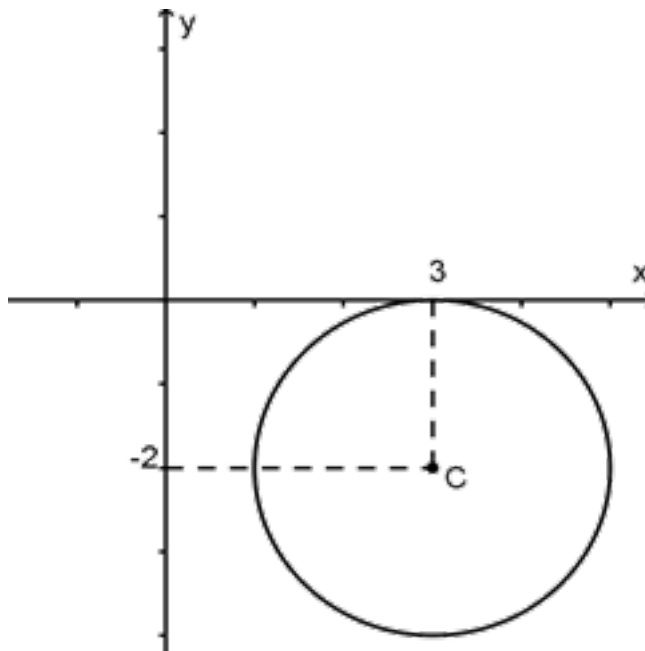
$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2, \text{ obtemos:}$$

$$(x-3)^2 + [y-(-2)]^2 = 2^2$$

ou

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4$$

Desenvolvendo, temos $x^2 - 6x + y^2 + 4y - 9 = 0$



Exemplo 6:

Encontre uma equação da circunferência tangente aos eixos cujo raio é 4 e o centro se encontra no 2º quadrante.

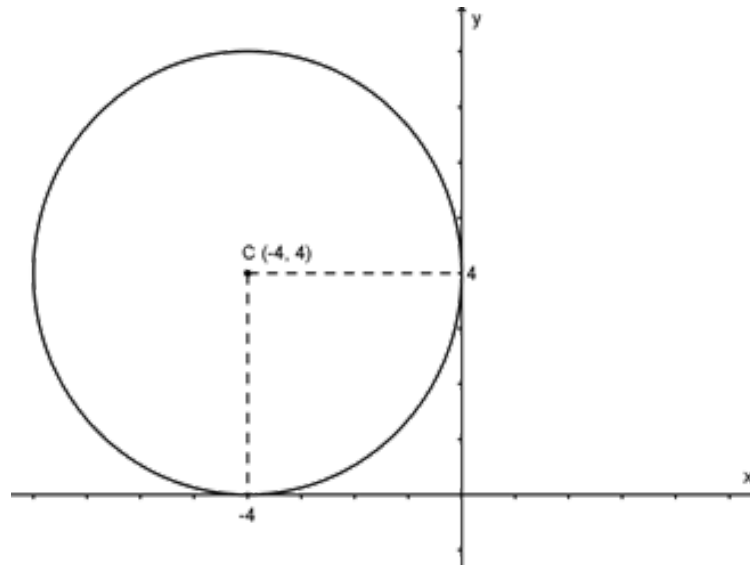
Solução:

Com os dados informados obtemos o centro da circunferência $C(-4, 4)$ e o raio

4. Observe a figura da circunferência, sua equação é:

$$[x - (-4)]^2 + (y-4)^2 = 4^2$$

ou,
 $(x+4)^2 + (y-4)^2 = 4^2$



Exemplo 7:

Determine o centro e o raio da circunferência $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 43 = 0$.

Solução:

Podemos escrever:

$$(x^2 - 12x) + (y^2 - 8y) + 43 = 0$$

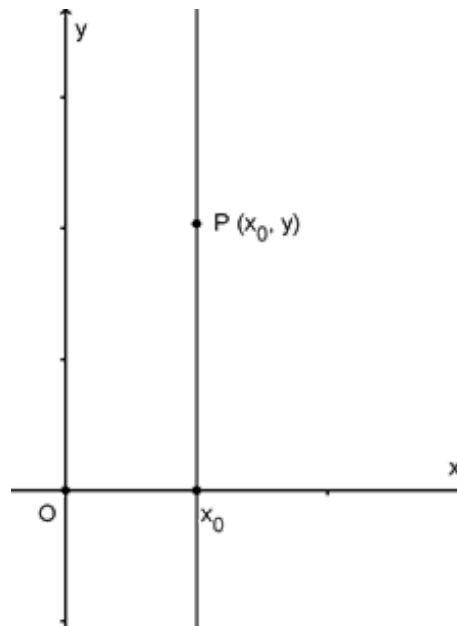
Completando quadrados

$$(x^2 - 12x + 36) - 36 + (y^2 - 8y + 16) - 16 + 43 = 0$$

$$(x-6)^2 + (y-4)^2 = 9$$

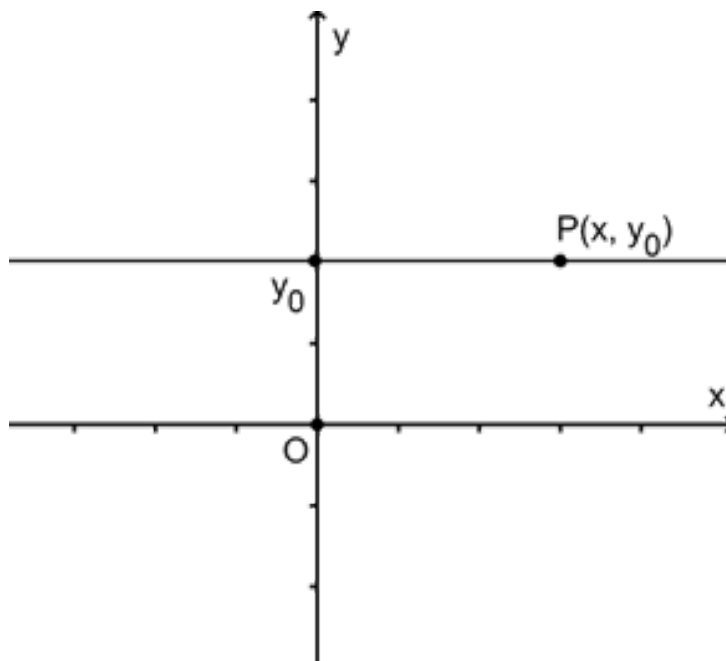
Identificando com a equação $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$, obtemos as coordenadas do centro $C(6,4)$ e raio 3.

Retas no Plano



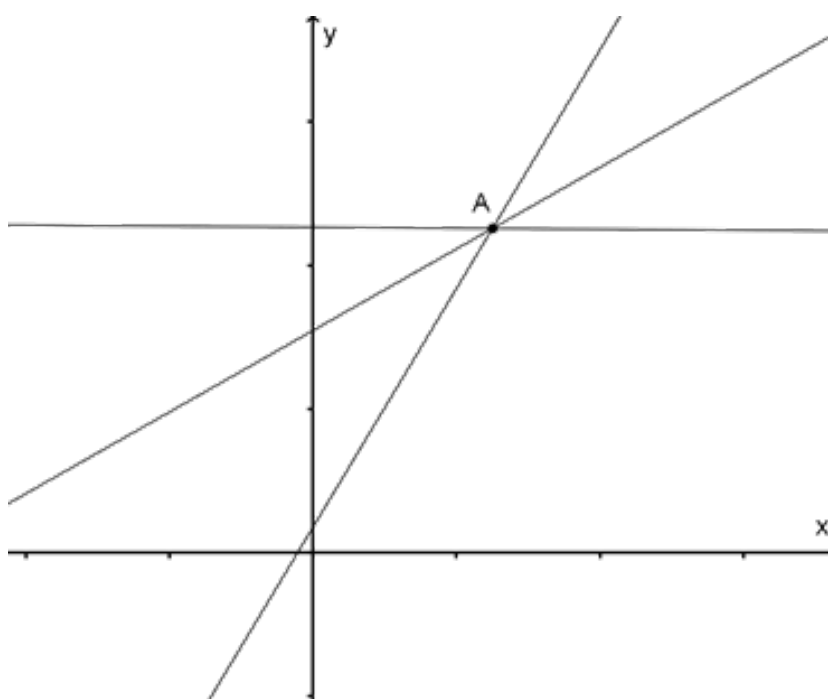
Os pontos do plano que se encontram sobre uma reta vertical que intercepta o eixo x em x_0 , possuem coordenadas do tipo (x_0, y) , note que a 1ª coordenada é fixa e igual a x_0 .

Veja a figura a seguir:

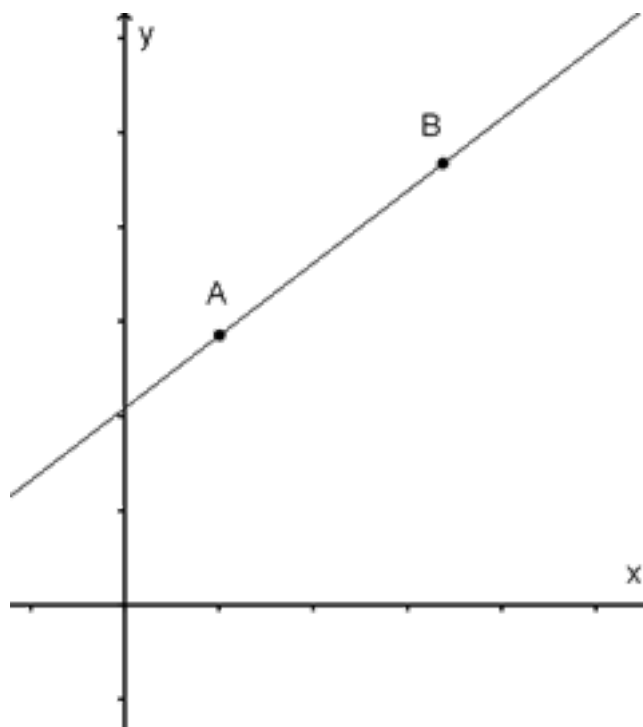


Na figura anterior observamos que os pontos do plano que se encontram sobre uma reta horizontal que intercepta o eixo y em y_0 têm coordenadas do tipo (x, y_0) , note que a 2ª coordenada é fixa igual a y_0 .

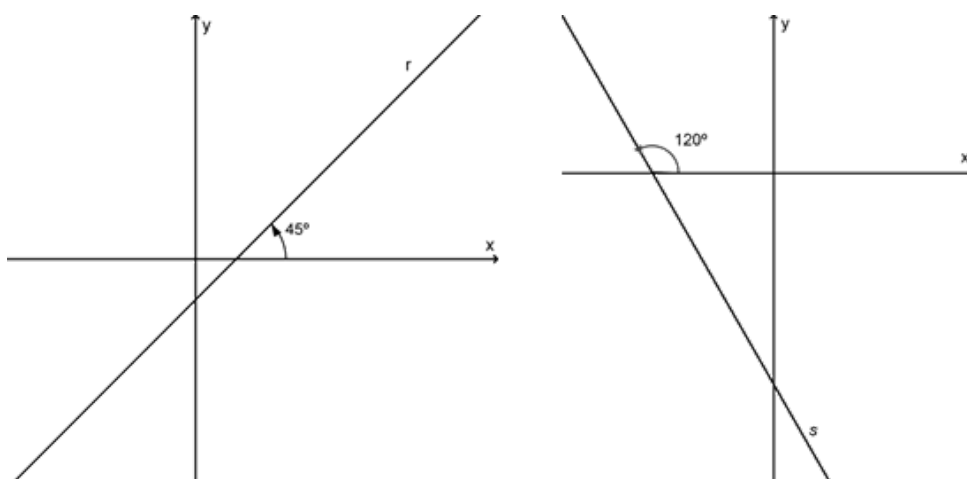
Sabemos que por um ponto A passam infinitas retas



e que por dois pontos A e B passa uma única reta.



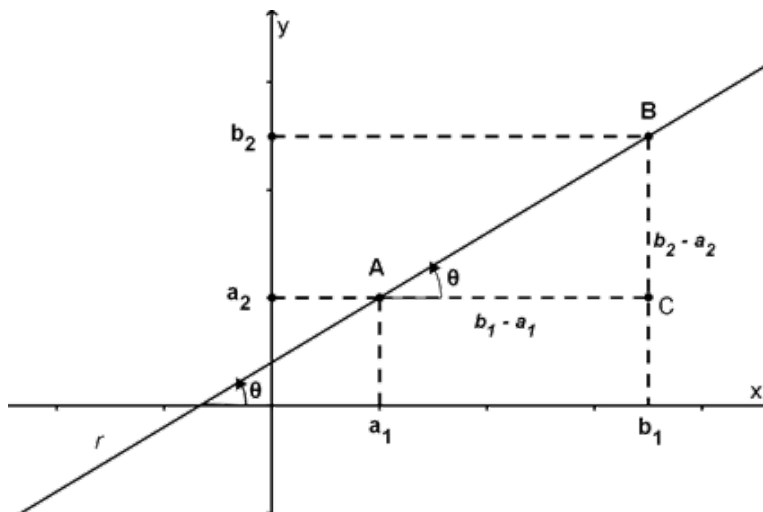
A **inclinação** de uma reta no plano é o ângulo, no sentido anti-horário, que ela forma com o semi-eixo positivo. Veja a figura.



Mas para determinar a equação de uma reta no plano utilizaremos a tangente trigonométrica da inclinação e a denominaremos de **declividade** da reta ou **coeficiente angular** da reta. Assim a reta r da figura acima tem inclinação 45° e declividade $m_r = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$ e a reta s tem inclinação 120° e declividade $m_s = \operatorname{tg} 120^\circ = -1,73$.

Retas verticais não possuem declividade, pois $\operatorname{tg} 90^\circ$ não existe com número real.

Dados dois pontos distintos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ sobre uma reta, vamos determinar a sua declividade.



Observe na anterior que os ângulos indicados são congruentes e assim a declividade da reta pode ser determinada no triângulo ACB sendo:

$$\text{tg } \theta = (\text{Cateto Oposto}) / (\text{Cateto Adjacente}) = (b_2 - a_2) / (b_1 - a_1)$$

A declividade de uma reta será indicada pela letra m , assim:

$$m = (b_2 - a_2) / (b_1 - a_1)$$

Você deve observar que o denominador $b_1 - a_1$ é sempre diferente de zero, pois se a reta tem declividade ela não é vertical.

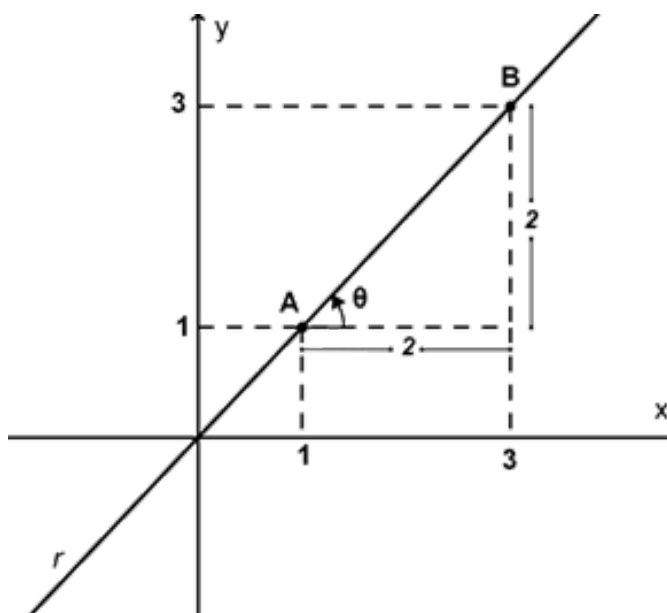
Exemplo 8:

A declividade da reta que passa pelos pontos A(1,1) e B(3,3) é 1.

Solução:

Como a declividade da reta é $m = (b_2 - a_2) / (b_1 - a_1)$, temos:

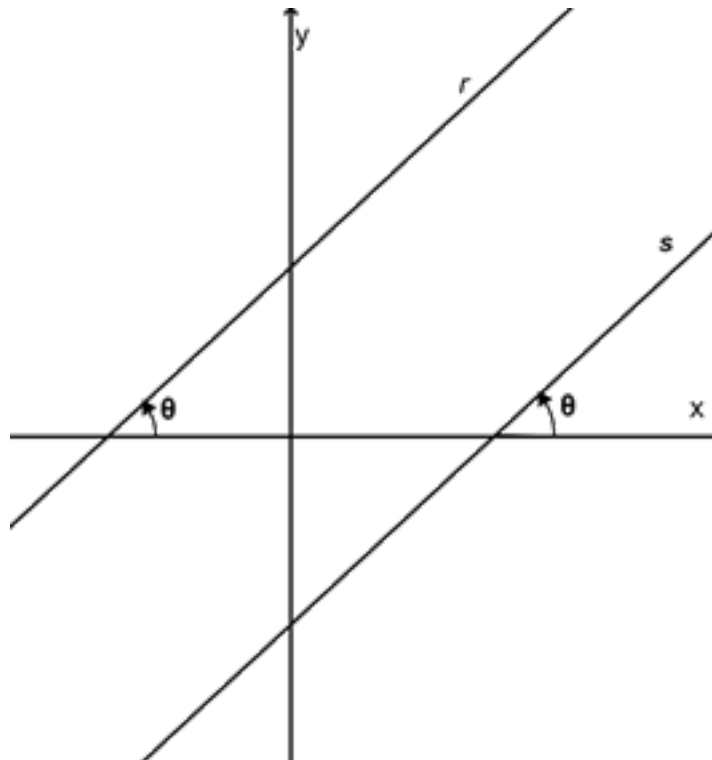
$$m = (3 - 1) / (3 - 1) = 2 / 2 = 1$$



Atividade III:

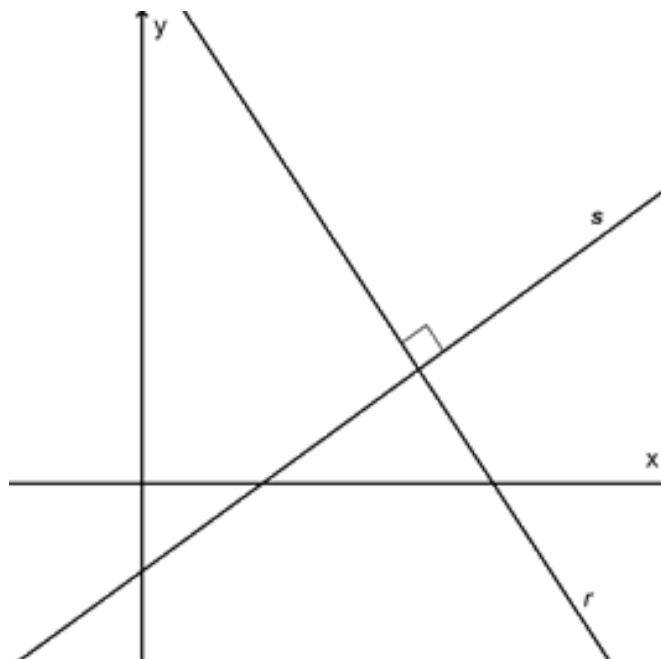
1) Mostre a seguinte proposição:

Duas retas são paralelas se, e somente se, possuem a mesma declividade. Ou seja, se m_r é a declividade da reta r e m_s é a declividade da reta s , então $m_r = m_s$.



2) Mostre a seguinte proposição:

Duas retas são perpendiculares se, e somente se, a declividade de uma delas é o inverso simétrico da outra. Ou seja, se m_r é a declividade da reta r e m_s é a declividade da reta s , então $m_r = -1/m_s$.



Equação de uma Reta

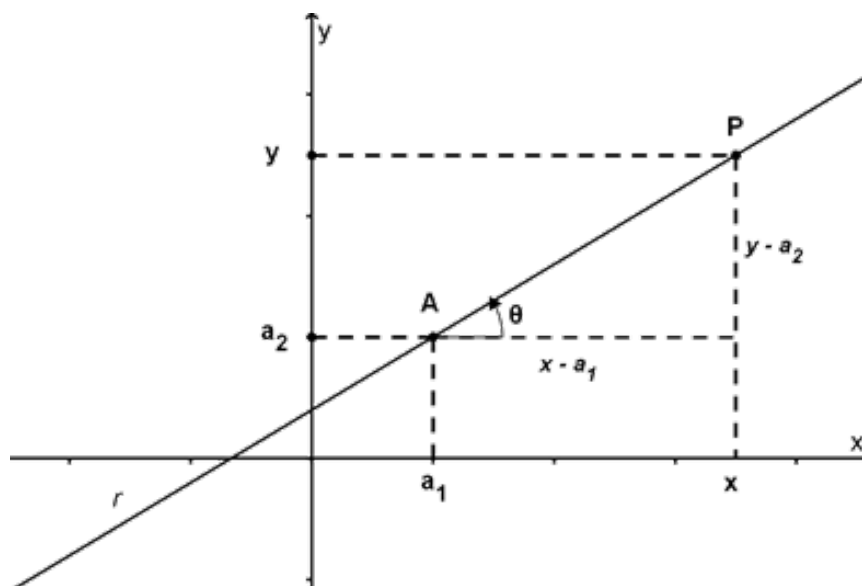
Se um ponto $P(x,y)$ pertence a uma reta que passa por $A(a_1,a_2)$ com declividade m , podemos escrever:

$$m = (y - a_2) / (x - a_1)$$

ou ainda

$$y - a_2 = m(x - a_1)$$

que é denominada equação reduzida da reta.



Exemplo 9:

A equação da reta que contém os pontos $A(3,-1)$ e $B(2,4)$ é: $y + 5x - 14 = 0$

Solução:

$$y - 4 = \frac{4 - (-1)}{2 - 3} \cdot (x - 2)$$

ou

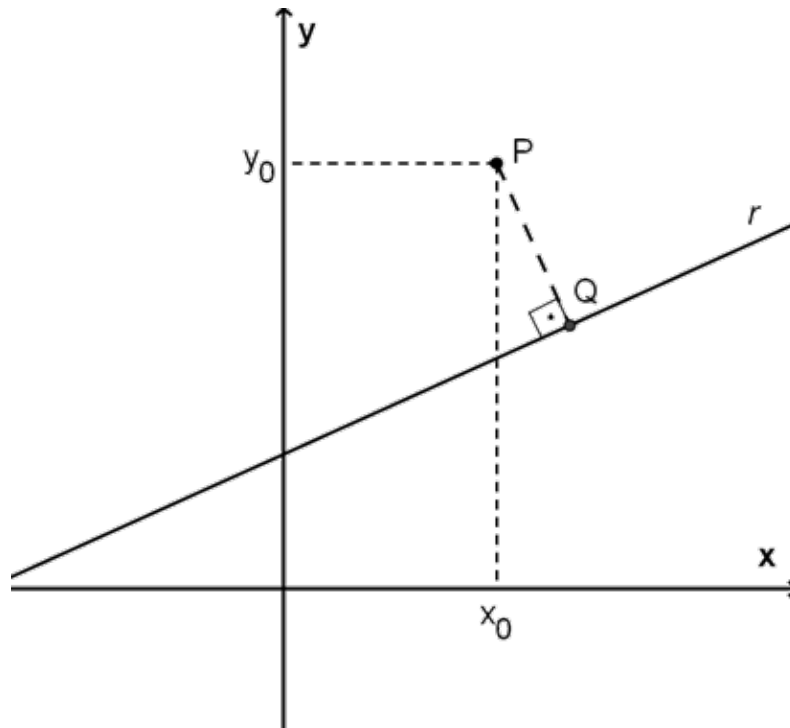
$$y - 4 = -5 \cdot (x - 2)$$

ou ainda,

$$y + 5x - 14 = 0$$

Atividade IV:

1) Mostre que a distância de um ponto $P(x_0, y_0)$ a uma reta r , de equação $ax+by=c$ é $d(P, r) = \frac{|ax_0+by_0-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

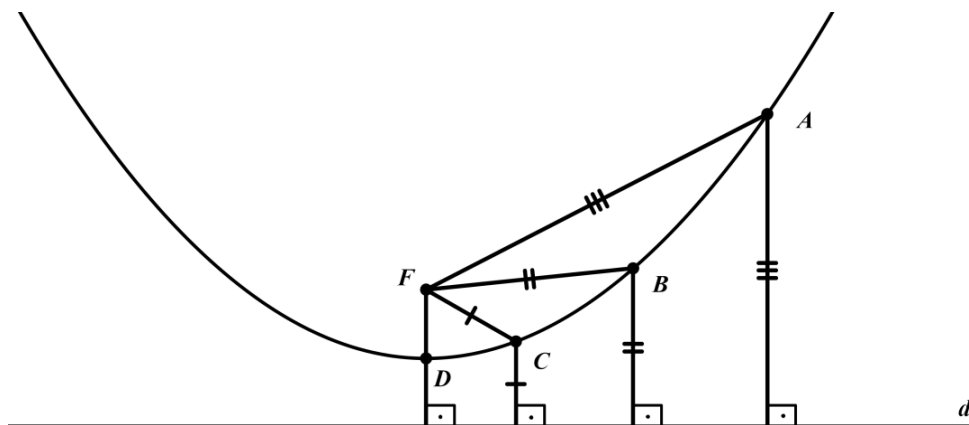


Lista de Exercícios

- 1) Dado o ponto $P(2,-3)$, qual é o seu simétrico em relação ao eixo x ?
- 2) Qual é o simétrico do ponto $P(-2,-1)$ em relação à origem $O(0,0)$?
- 3) Quais são os vértices de um quadrado com centro na origem do sistema de coordenadas, se os lados são paralelos aos eixos coordenados medem 6?
- 4) Qual o perímetro do triângulo de vértices $P(1,2)$, $Q(3,4)$ e $R(1,6)$? Esse triângulo é isósceles? Justifique.
- 5) Provar que o triângulo com vértices $A(3,-6)$, $B(8,-2)$ e $C(-1,-1)$ é retângulo.
- 6) Achar um ponto com abscissa 4 cuja distância ao ponto $P(-2,7)$ seja igual a 10.
- 7) Se um extremo de um segmento de reta for o ponto $A(3,-4)$ e o ponto médio desse segmento é o ponto $M(1,-3)$, achar as coordenadas do outro extremo.
- 8) Determinar uma equação da reta que passa pelo ponto $P(6,2)$ e tem inclinação 135° .
- 9) Escrever uma equação da reta que passa pelo ponto $A(1,-3)$ e tem declividade $m=3$.
- 10) Estabelecer uma equação da reta que passa pelos pontos $A(3,5)$ e $B(-3,2)$.
- 11) Determinar k para que as retas $2x-4y=1$ e $3x-ky=2$ sejam:
 - a) paralelas;
 - b) perpendiculares.
- 12) Encontrar a equação da circunferência de centro em $C(2,-1)$ e raio igual a 2.
- 13) Determinar a equação da circunferência de centro $C(-4,6)$ que passa pelo ponto $P(1,2)$.

Parábola

Considere, em um plano, um ponto F e uma reta d que não contém F . Parábola é o conjunto dos pontos de um plano que são equidistantes de F e d .



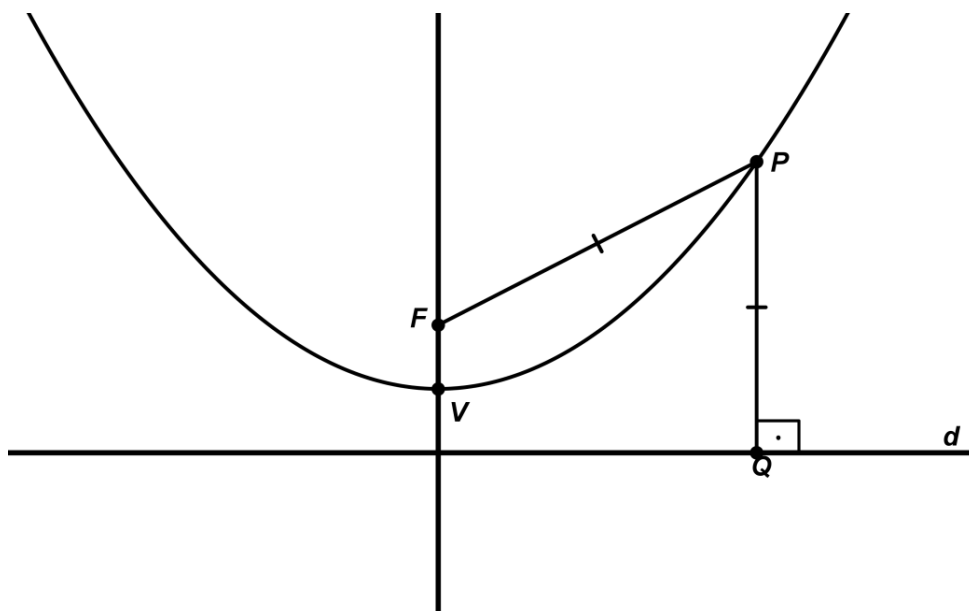
O ponto F é denominado **foco** e a reta d **diretriz** da parábola.

Nossa intenção é encontrar uma equação para a parábola e notamos que a definição envolve conceito de distância entre pontos e distância de um ponto a uma reta.

De acordo com a definição, um ponto F do plano pertence à parábola de foco F e diretriz d se, e somente se,

$$d(P, F) = d(P, d)$$

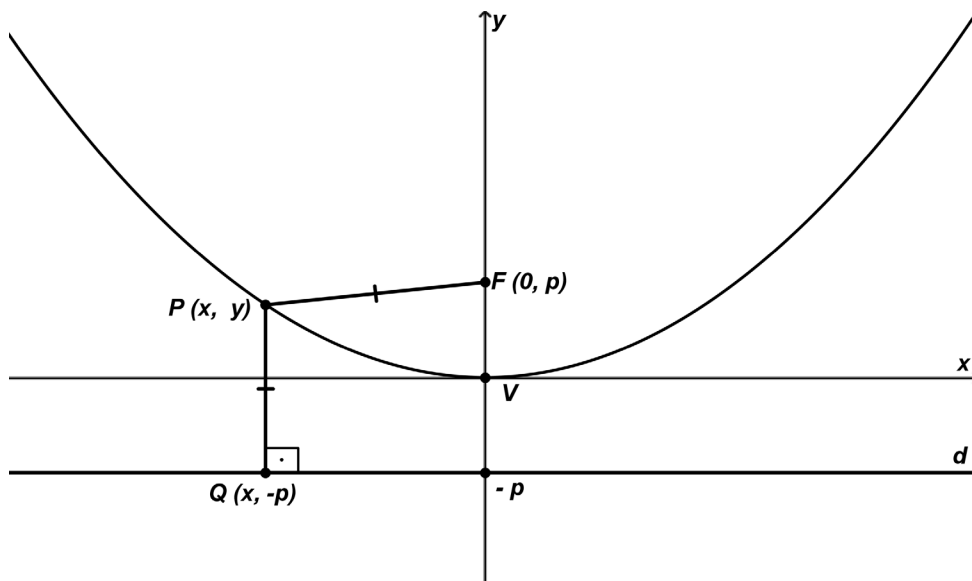
Indicando por Q o pé da perpendicular baixada de um ponto P do plano sobre a diretriz d , P pertence à parábola se, e somente se, $d(P, F) = d(P, Q)$



A reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz é chamada de **eixo** da parábola. O ponto de interseção da parábola com o seu eixo é o **vértice** da parábola, indicado pela letra V . Note que: $d(F,V) = d(V,d)$

Equação da Parábola

Vamos deduzir a equação da parábola em uma posição favorável aos cálculos. Em um sistema de coordenadas, o eixo da parábola coincide com o eixo y , e o vértice da parábola coincide com a origem do sistema de coordenadas.



Desta forma, o foco é um ponto sobre o eixo y , digamos $F(0,p)$. Com isso, a diretriz também fica determinada e é a reta $x=-p$, pois:

$$d(F,V) = d(V,d) = |p|$$

Se $P(x,y)$ é um ponto qualquer da parábola, então, o ponto Q tem coordenadas $Q(x,-p)$.

Por definição:

$$d(P,F) = d(P,Q)$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + [y-(-p)]^2}$$

elevando ambos os membros ao quadrado e desenvolvendo os quadrados perfeitos:

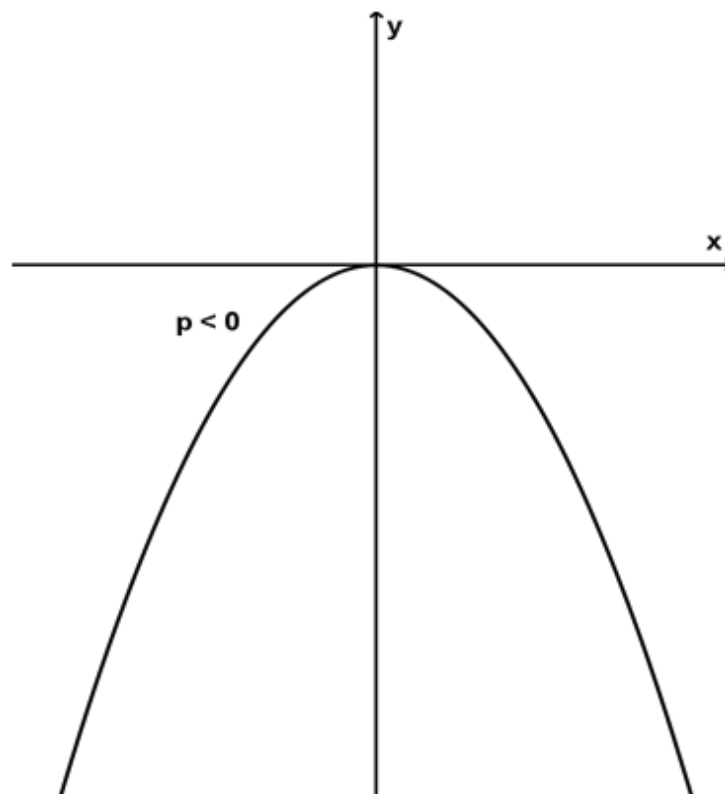
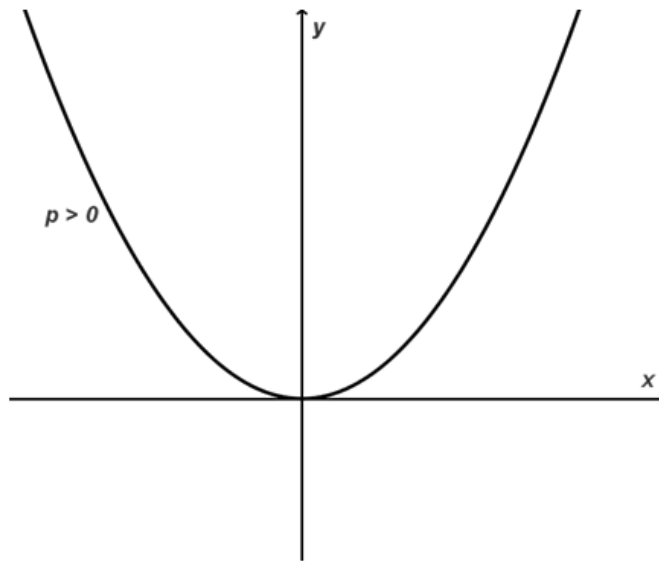
$$x^2 + y^2 - 2yp + p^2 = y^2 + 2yp + p^2$$

efetuando os cálculos, obtemos:

$$x^2 = 4yp$$

e essa é denominada **equação da parábola** de vértice na origem e eixo, coincidindo com o eixo^y.

O sinal de p na equação $x^2 = 4py$ determina se a parábola tem concavidade voltada para **cima** ou para **baixo**. Vejamos:



como x^2 é um número não negativo, a equação $x^2 = 4py$ indica que o membro direito também é um número não negativo, isto é, $4py$ é menor ou igual a zero. Para isso, $y=0$ ou p e y devem ter o mesmo sinal.

Se $p > 0$, então $y > 0$ e o ponto da parábola $P(x,y)$ está no 1º ou no 2º quadrante do sistema de coordenadas. Dessa forma, a parábola tem concavidade para cima.

Se $p < 0$, então $y < 0$ e o ponto da parábola $P(x,y)$ está no 3º ou no 4º quadrante do sistema de coordenadas. Dessa forma, a parábola tem concavidade para baixo.

Exemplo 1

Encontre o foco, a equação da diretriz da parábola $y = -\frac{x^2}{16}$ e faça um esboço.

Solução:

Vamos escrevê-la na forma $x^2 = 4py$, assim:

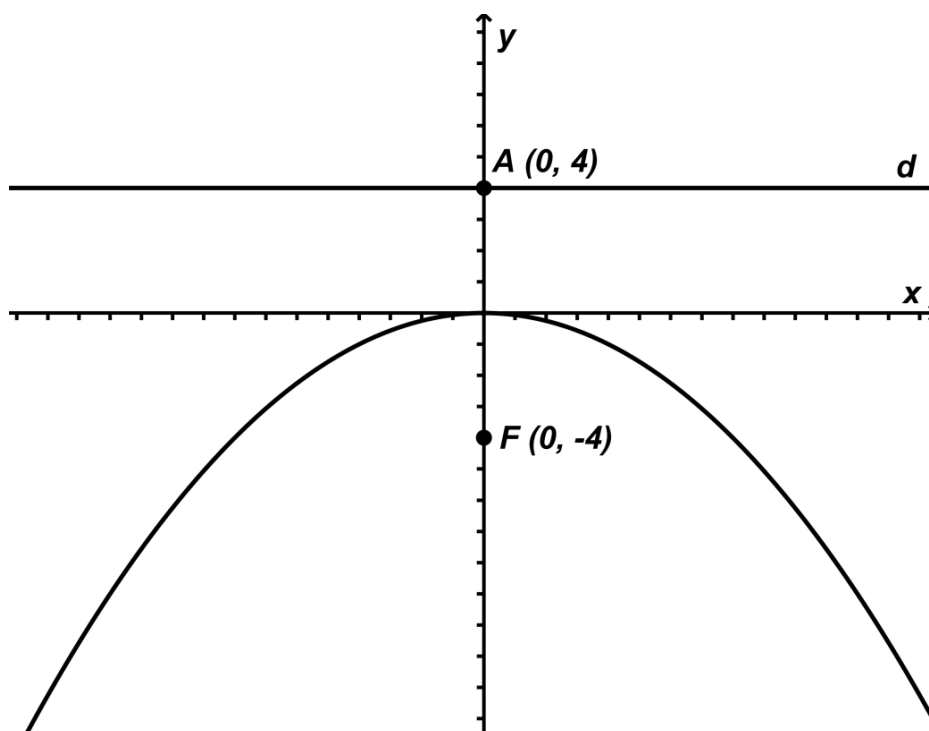
$$x^2 = -16y$$

$$x^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (-16y)$$

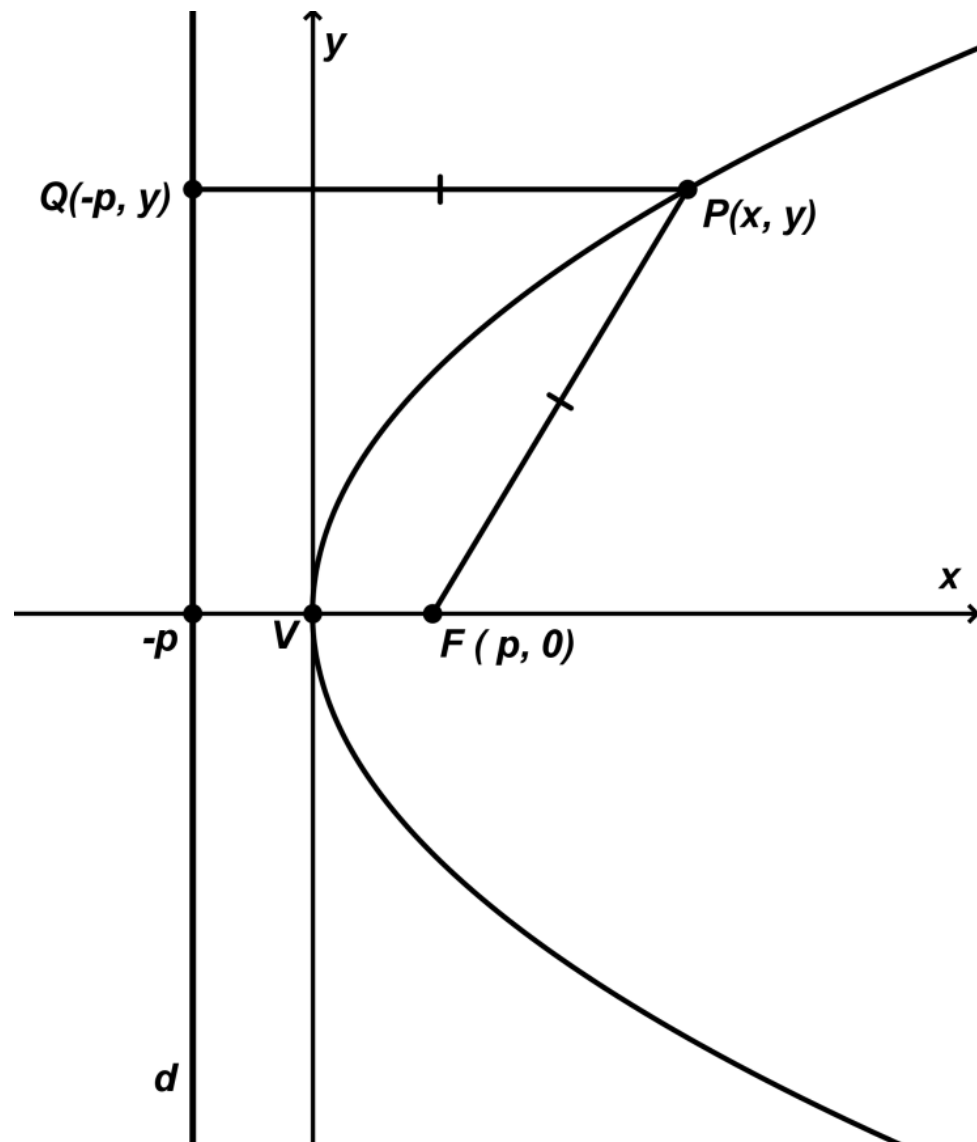
$$x^2 = 4 \cdot \left(-\frac{16}{4}y\right)$$

$$x^2 = 4 \cdot (-4y)$$

identificamos nesta equação $p = -4$. Daí, o foco é $F(0, -4)$ e a diretriz $y = 4$



Agora, vamos deduzir a equação da parábola cujo eixo coincide com o eixo x e o vértice coincide com a origem do sistema de coordenada.



O foco é um ponto sobre o eixo x : $F(p,0)$ e assim, a diretriz é a reta $x = -p$. Se $P(x,y)$ é um ponto da parábola, então $Q(-p,y)$ é pela definição de parábola:

$$d(P, F) = d(P, Q)$$

$$\sqrt{(x - p)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{[x - (-p)]^2 + (y - y)^2}$$

elevando ambos os membros ao quadrado e desenvolvendo os quadrados perfeitos:

$$x^2 - 2xp + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

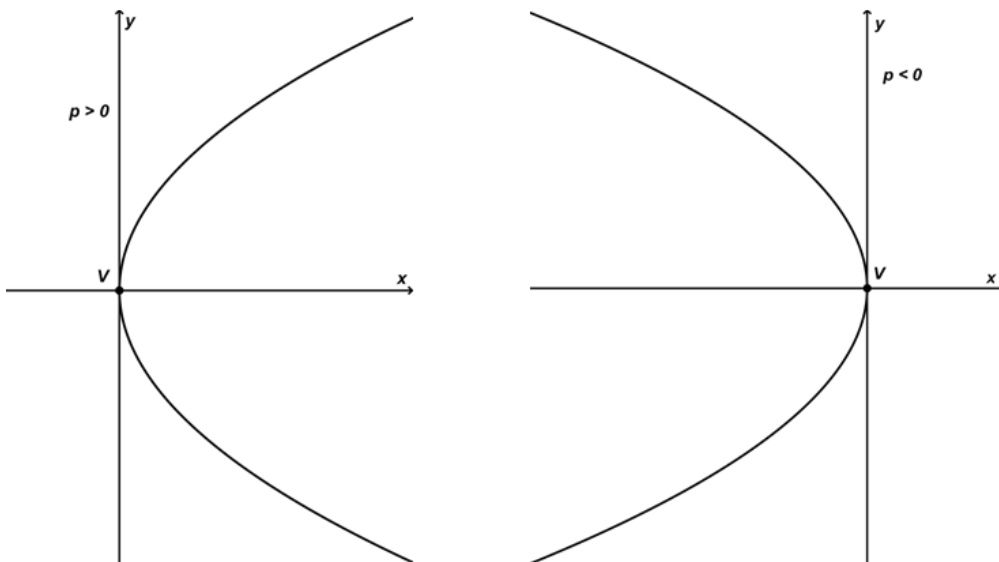
efetuando os cálculos, temos:

$$y^2 = 4px$$

que é denominada **equação da parábola** de vértice na origem e eixo coincidindo com o eixo x .

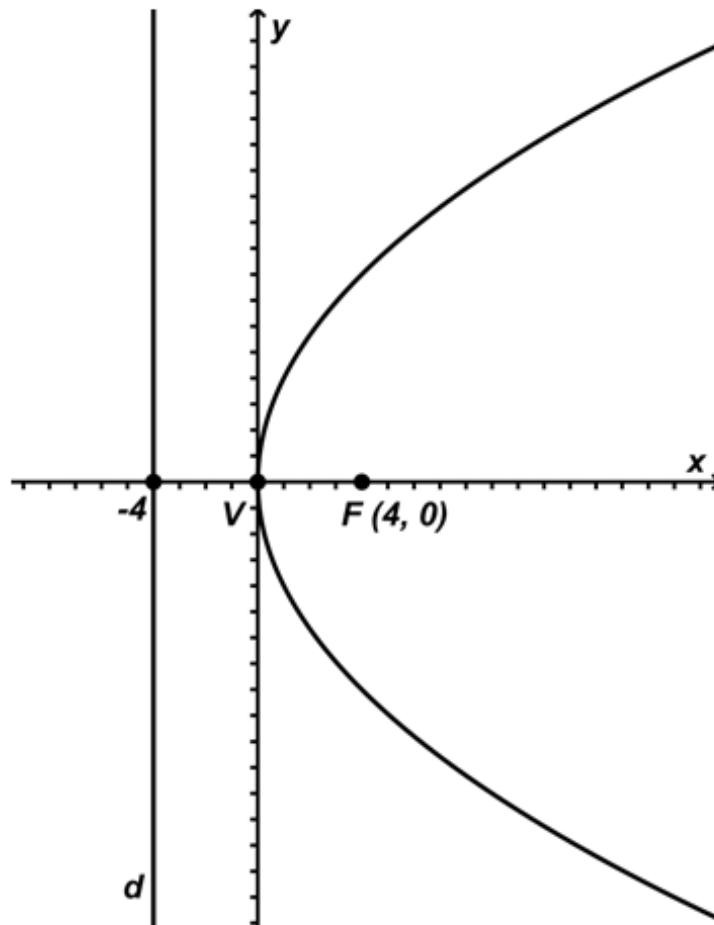
Atividade I:

O sinal de p na equação $y^2 = 4px$ determina se a parábola tem concavidade voltada para a direita ou esquerda. Observe que se $p > 0$, então, a parábola tem concavidade para a direita. Se $p < 0$, então, a parábola tem concavidade para a esquerda



Exemplo 2:

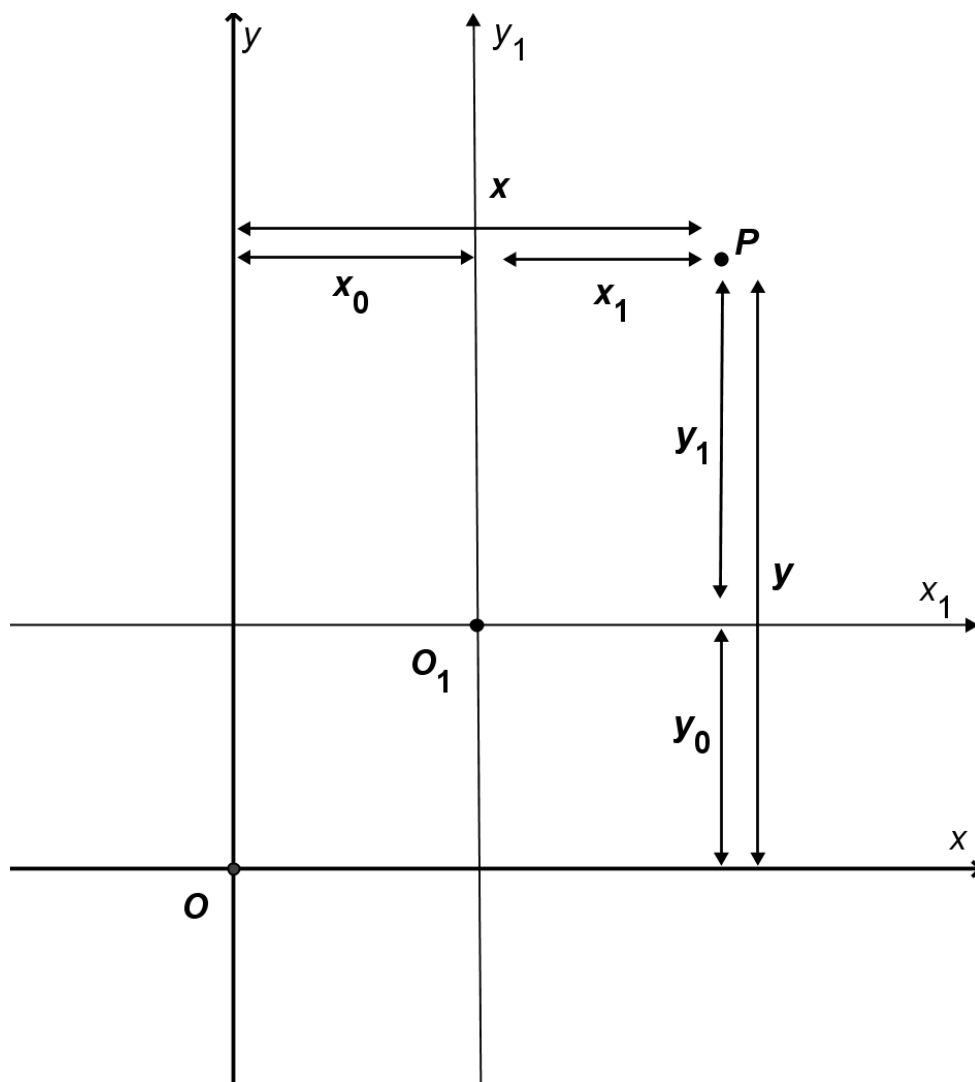
Dada a equação $y^2 = 16x$, podemos identificar p fazendo: $y^2 = 4.4.x$, uma vez que a equação da parábola é $y^2 = 4px$, obtemos $p = 4$ e disso, o foco é $F(4,0)$ e a diretriz $x = -4$



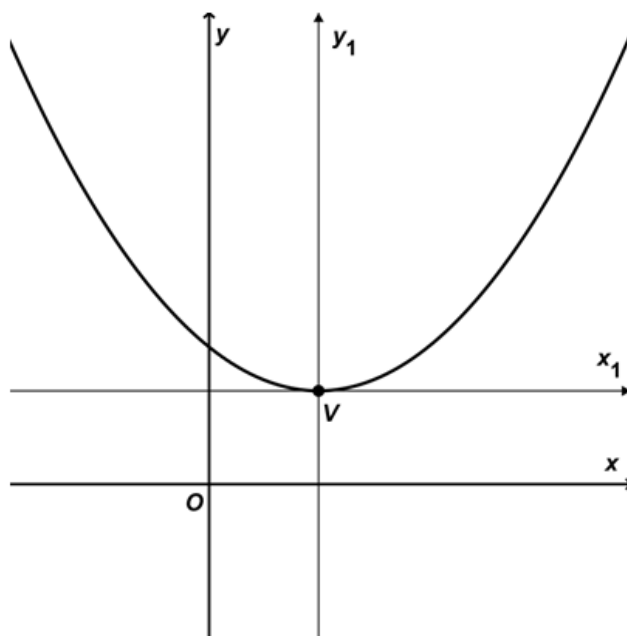
Translação de Eixos

Faremos uma translação de eixos para encontrar uma equação da parábola que possui eixo paralelo a um dos eixos coordenados. Veja a figura a seguir, na qual estão representados dois sistemas de coordenadas x_0y_0 e x_1y_1 . Um ponto P do plano tem coordenadas $P(x_1, y_1)$ no sistema x_1y_1 , mas também $P(x, y)$ no sistema x_0y_0 e disso, obtemos a relação:

$$x = x_0 + x_1 \quad \text{e} \quad y = y_0 + y_1$$



Agora, estamos preparados para encontrar a equação de uma parábola, cujo eixo é paralelo ao eixo y e o vértice $V(x_0, y_0)$ coincidindo com a origem O_1 do novo sistema de coordenadas x_1, y_1 .



Neste novo sistema de coordenadas x_1, y_1 a parábola tem equação: $x_1^2 = 4py_1$ e como $x_1 = x - x_0$ e $y_1 = y - y_0$ temos que:

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$$

é a equação da parábola de vértice $V(x_0, y_0)$ e eixo paralelo ao eixo y .

Atividade II:

Deduza a equação da parábola de vértice $V(x_0, y_0)$ e eixo paralelo ao eixo x .

Exemplo 3

Determine o foco e a diretriz da parábola $x^2 - 4x - 24y + 28 = 0$

Solução:

Primeiramente, vamos colocar a equação da parábola na forma $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$. Note que o eixo da parábola é paralelo ao eixo y .

Dada

$$x^2 - 4x - 24y + 28 = 0$$

podemos escrever:

$$x^2 - 4x = 24y - 28$$

completando quadrados:

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 = 24y - 24$$

Efetando os cálculos:

$$(x - 2)^2 = 24y - 24$$

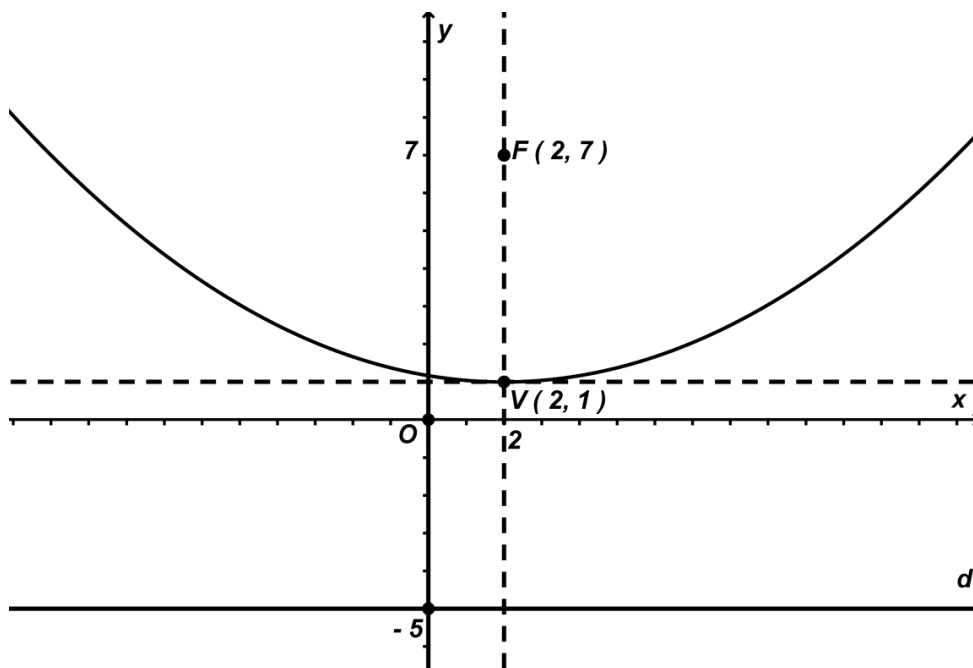
e daí,

$$(x - 2)^2 = 24(y - 1)$$

Comparando com a equação $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$, obtemos $x_0 = 2$ e $y_0 = 1$ que determina o vértice da parábola $V(2, 1)$.

Identificando p : $4p = 24$, então, $p = 6$, o que nos leva a concluir que a parábola tem concavidade voltada para cima. Como $d(F, V) = 6$, temos que as coordenadas do foco são $F(2, 7)$.

O valor de p também determina a diretriz d , pois se lembre que $d(V, d) = |p|$. Neste caso, $d(V, d) = 6$ e, assim, $y = -5$ é a equação da diretriz.

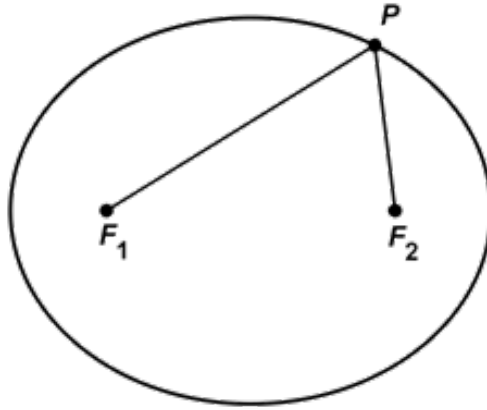


Lista de Exercícios

- 1) Encontre a equação da parábola com foco $F(0, -2)$ e com diretriz em $y=2$.
- 2) Qual é o valor de m para que a parábola $y^2=mx$ tenha foco no ponto $F(6,0)$?
- 3) Achar a equação de uma parábola de foco $F(-7,0)$ e diretriz dada pela equação $x - 7=0$
- 4) Achar a equação de uma parábola cujo vértice coincida com a origem do sistema de coordenadas, sabendo-se que a parábola está disposta simetricamente ao eixo x e passa pelo ponto $A(9,6)$.
- 5) A reta $x-y+2=0$ intercepta a parábola $y^2=8x$?
- 6) Achar a equação de uma reta tangente à parábola $y^2=8x$ e paralela à reta $2x+2y-3=0$.
- 7) Determine o foco, o vértice, a equação da diretriz e esboce as parábolas cujas equações são: $x=(1/4)y^2$ e $y=-(1/4)x^2$.
- 8) Deduza uma equação da parábola que contém o ponto $P(1,4)$, sabendo que seu eixo é paralelo ao eixo y e que seu vértice é o ponto $V(2,3)$.
- 9) Encontre as coordenadas do foco e a equação da diretriz da parábola $x^2+6x-12y+57=0$.

Elipse

Considere em um plano dois pontos distintos fixos F_1 e F_2 . **Elipse** é o conjunto de pontos do plano cuja soma das distâncias aos pontos F_1 e F_2 é constante.



Os pontos F_1 e F_2 são os **focos** da elipse.

Nossa intenção é encontrar uma equação para a elipse, notamos que a definição envolve apenas o conceito de distância entre pontos

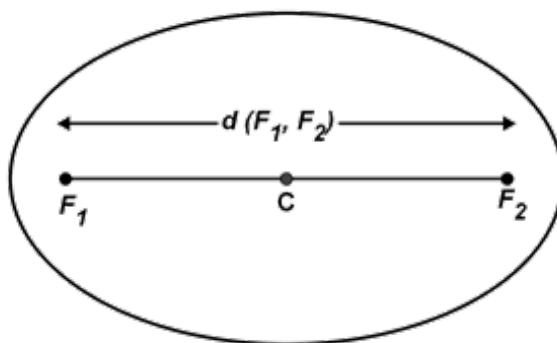
De acordo com a definição, um ponto P do plano pertence à elipse de focos F_1 e F_2 se, e somente se,

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = \text{constante}$$

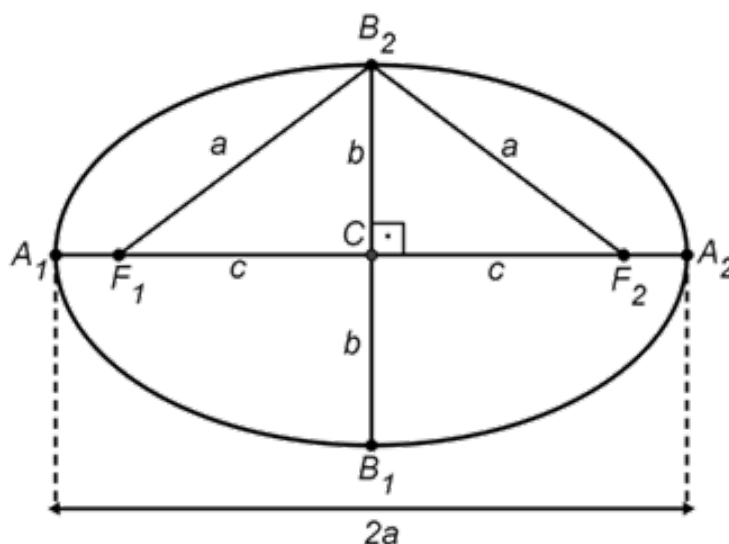
A fim de deduzirmos uma equação para a elipse, indicaremos a constante por $2a$. Assim, P pertence a elipse se, e somente se:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

A distância entre os focos $d(F_1, F_2) = 2c$, denomina-se **distância focal**; o ponto médio do segmento $F_1 F_2$ é o **centro** da elipse, e será indicado pela letra C .



Em toda elipse, os pontos B_2, C, F_2 determinam o triângulo retângulo de dimensões a, b, c , como na figura a seguir e, pelo teorema de Pitágoras, obtemos a seguinte relação: $a^2 = b^2 + c^2$. Note que já conhecemos a e c . O valor de b fica assim determinado $b^2 = a^2 - c^2$.



A elipse possui 4 **vértices** que são os pontos caracterizados a seguir:

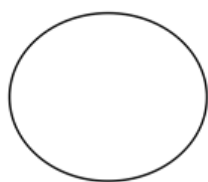
A_1 e A_2 são pontos da elipse, tais que $d(A_1, C) = d(A_2, C) = a$.

B_1 e B_2 são pontos da elipse, tais que $d(B_1, C) = d(B_2, C) = b$.

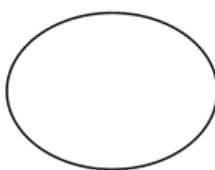
O **eixo maior** da elipse é o segmento A_1A_2 cujo comprimento é $2a$, e o **eixo menor** da elipse é o segmento B_1B_2 cujo comprimento é $2b$.

Excentricidade

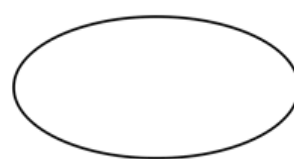
A **excentricidade** de uma elipse é o número real positivo $e = c/a$. Observe que como $c < a$ temos que $0 < e < 1$. Esse número está relacionado à forma da elipse; quanto mais próximo de zero for o valor de e , a forma da elipse se aproxima da forma de uma circunferência. Quanto mais achatada for a elipse, mais o valor de e se aproxima de 1. Observe:



$e = 0,5$



$e = 0,66$



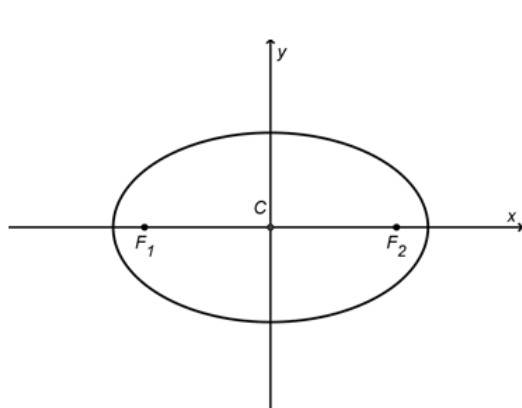
$e = 0,86$

Atividade I:

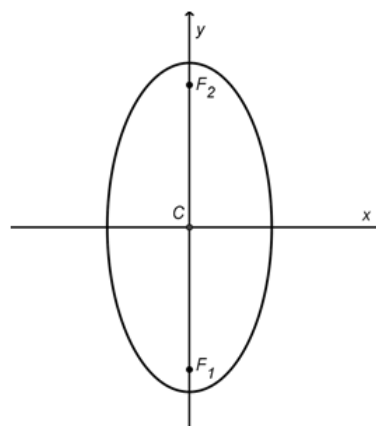
- 1) Fixado o valor de a , mostre que quanto mais a elipse se aproxima de uma circunferência, menor é a distância entre os focos.
- 2) Fixado o valor de a , mostre que quanto mais achatada é a elipse, maior é a distância entre os focos.

Equação da Elipse

A seguir, deduziremos uma equação da elipse em uma situação particular: o centro coincide com a origem do sistema e os focos estão sobre um eixo coordenado. Temos dois casos a considerar:



Focos sobre o eixo x



Focos sobre o eixo y

Consideremos o caso em que os focos estão sobre o eixo x :

Como $d(F_1, F_2) = 2c$, suponhamos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. De acordo com a definição, um ponto $P(x, y)$ pertence à elipse se, e somente se,

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

disso,

$$\sqrt{[x - (-c)]^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = 2a$$

e podemos escrever:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

elevando ambos os membros ao quadrado desenvolvendo os quadrados perfeitos:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

efetuando os cálculos e explicitando o radical:

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

$$a^2 [(x-c)^2 + y^2] = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

desenvolvendo os quadrados perfeitos e efetuando os cálculos:

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

mas podemos escrever:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

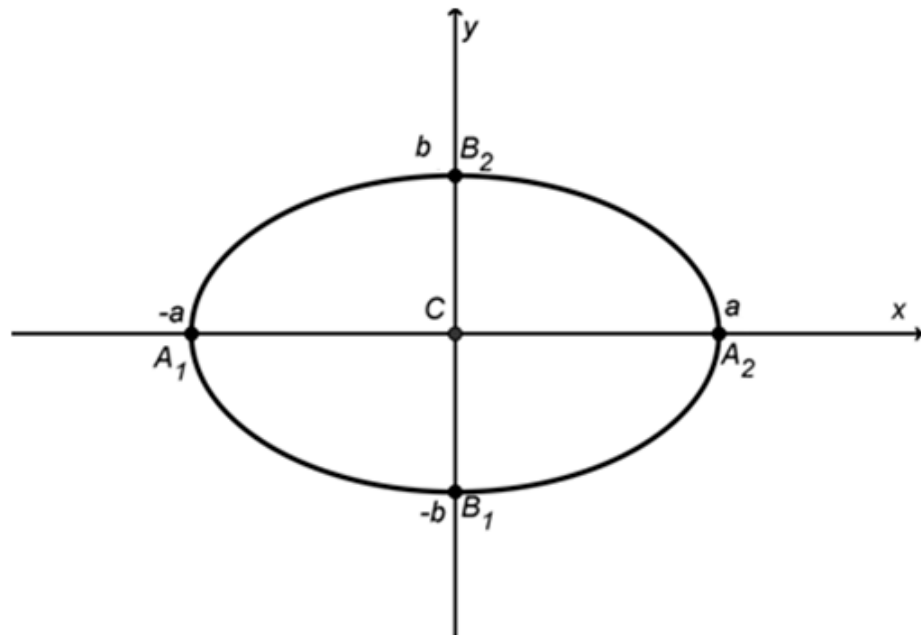
pela relação encontrada em toda elipse, $a^2 + b^2 = c^2$, podemos fazer $a^2 - c^2 = b^2$ e substituir acima:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

e dividindo ambos os membros por a^2b^2 , obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que é chamada **equação da elipse** de centro na origem e focos sobre o eixo x .



Observação:

Os vértices da elipse A_1 e A_2 pertencem ao eixo x e tem coordenadas $A_1 (-a, 0)$ e $A_2 (a, 0)$ e os vértices B_1 e B_2 pertencem ao eixo y e tem coordenadas $B_1 (0, -b)$ e $B_2 (0, b)$.

Exemplo 1

Determine os focos, os vértices e a excentricidade da elipse de equação

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Os focos são $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$ onde c é determinado na relação $a^2 + b^2 = c^2$. Comparando a equação $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ com a equação reduzida $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

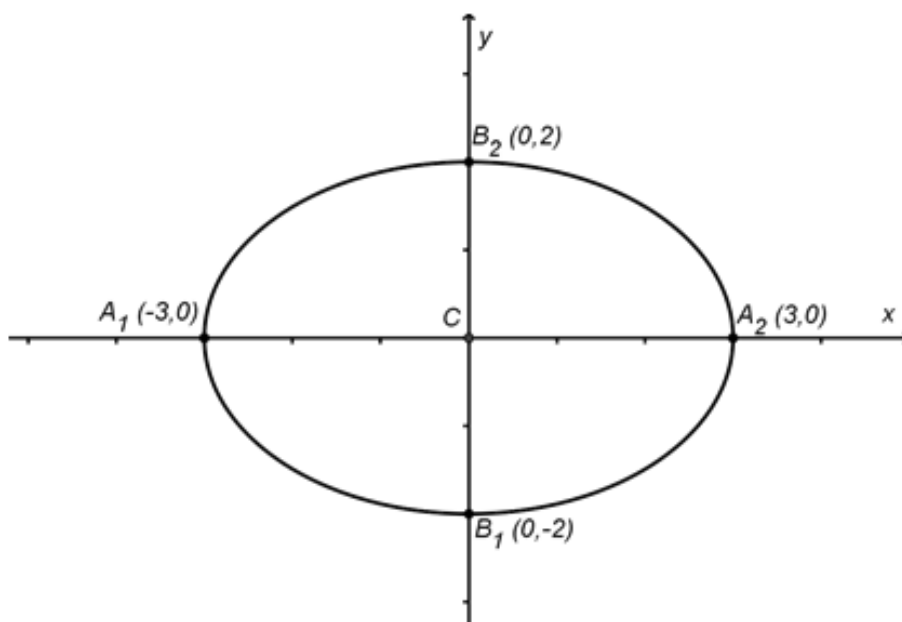
notamos que $a^2 = 9$ e $b^2 = 4$, e disso: $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$ e daí $c = \sqrt{5}$.

Logo os focos são $F_1(-\sqrt{5},0)$ e $F_2(\sqrt{5},0)$.

Para determinar os vértices, observamos que de $a^2=9$ a medida do eixo maior A_1A_2 é $2a=6$ e os vértices são $A_1(-3,0)$ e $A_2(3,0)$. E ainda da equação $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

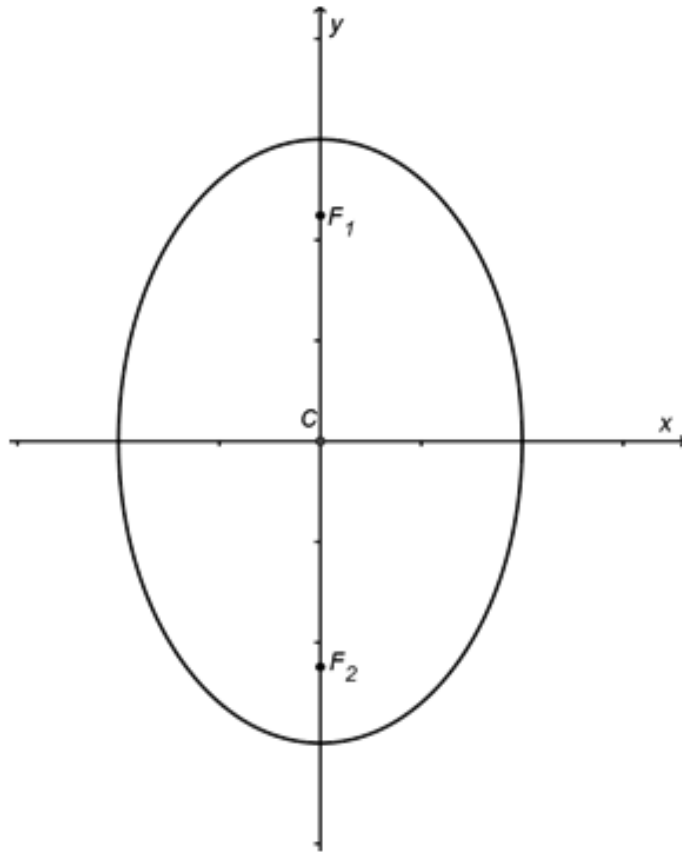
temos que $b^2=4$ o que implica $b=2$ e os vértices $B_1(0,-2)$ e $B_2(0,2)$.

A excentricidade é $e=(\sqrt{5})/3$. Veja o esboço da elipse:



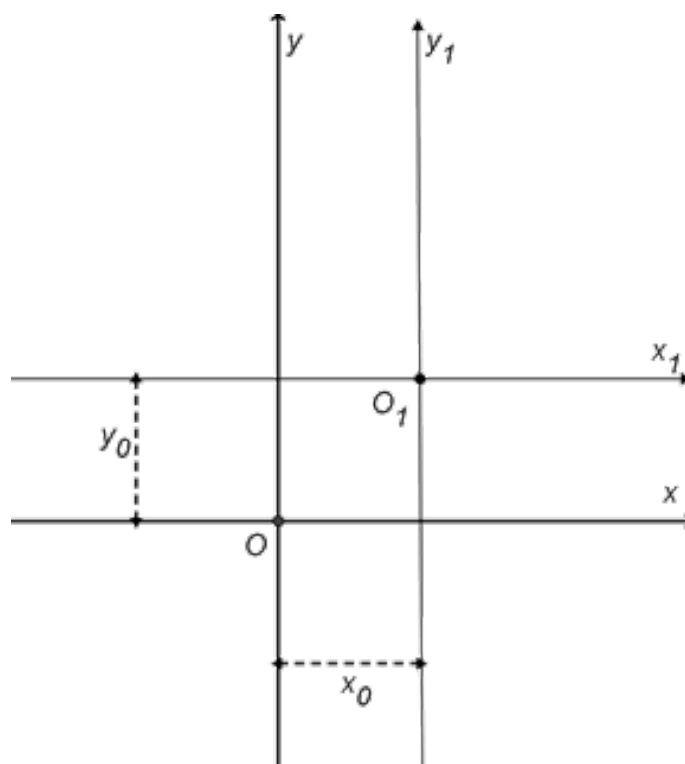
O segundo caso, centro coincidindo com a origem do sistema e focos sobre o eixo y, fica a seu cargo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Translação de Eixos

Vamos representar dois sistemas de coordenadas: o sistema xOy e o sistema $x_1O_1y_1$, de tal forma que a origem O_1 do sistema $x_1O_1y_1$ tem coordenadas (x_0, y_0) em relação ao sistema xOy e os eixos x_1 e y_1 são paralelos aos eixos x e y respectivamente e mantém a direção. Veja a figura:

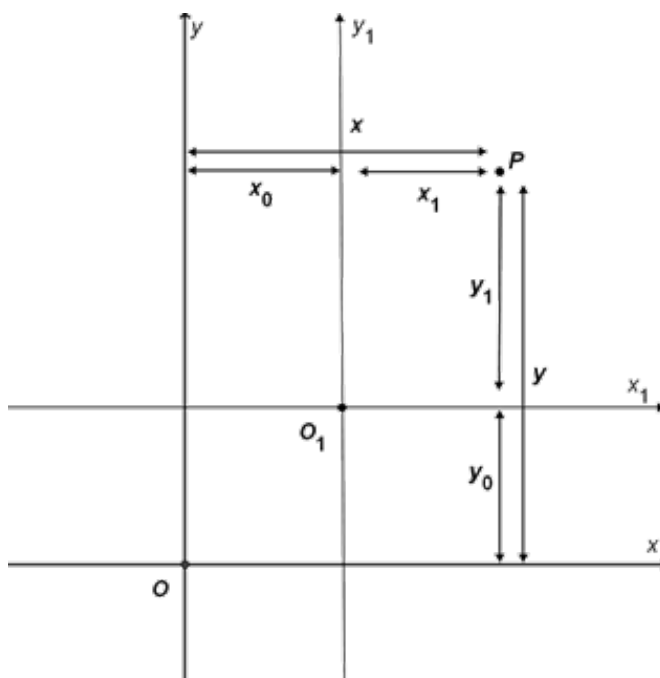


Um ponto qualquer P do plano tem coordenadas $P(x,y)$ em relação ao sistema xOy e coordenadas $P(x_1, y_1)$ em relação ao sistema $x_1 O_1 y_1$. Observamos as seguintes relações:

$$x = x_0 + x_1 \quad \text{e} \quad y = y_0 + y_1$$

e podemos escrever:

$$x_1 = x - x_0 \quad \text{e} \quad y_1 = y - y_0$$



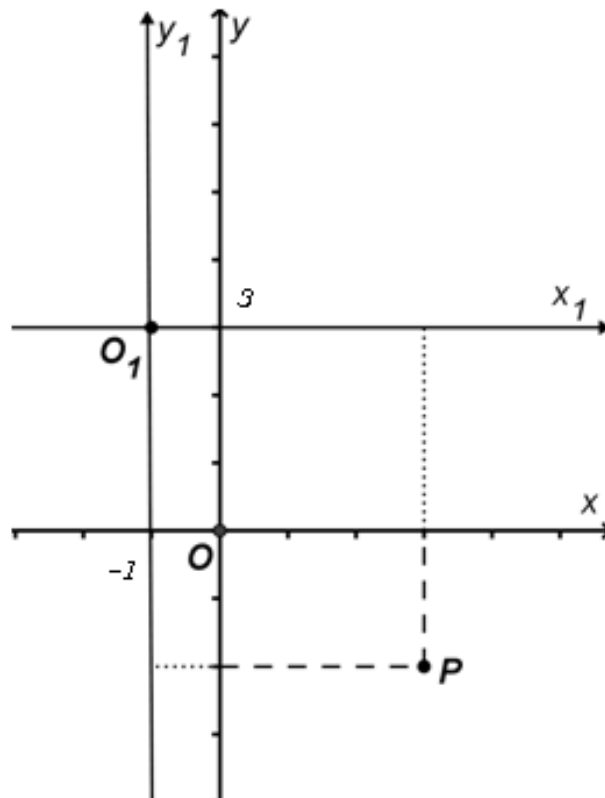
Exemplo 2

Seja o ponto $P(3,-2)$ em relação ao sistema xOy . Realizando uma translação em que a origem é $O_1(-1,3)$ as coordenadas de P em relação ao sistema $x_1 O_1 y_1$ são:

$$x_1 = 3 - (-1) = 4$$

$$y_1 = -2 - 3 = -5$$

Veja a figura a seguir:



Levando em consideração o exposto acima, a equação da elipse com centro no ponto $O_1(x_0, y_0)$ e eixo maior paralelo ao eixo x é $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$; e como $x_1 = x - x_0$ e $y_1 = y - y_0$, temos:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

que é a equação da elipse de centro $C(x_0, y_0)$ e eixo maior paralelo ao eixo x . Analogamente:

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$$

é a equação da elipse de centro $C(x_0, y_0)$ e eixo maior paralelo ao eixo y .

Exemplo 3

Encontre o centro e os focos da elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{x}{8} + y + \frac{1}{16} = 0$.

Solução:

Podemos escrever a equação acima da seguinte forma:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{x}{8} + \frac{y^2}{4} + y + \frac{1}{16} = 0$$

observando os coeficientes de x^2 e y^2 vamos fazer

$$\left(\frac{x^2}{16} - \frac{2}{2} \cdot \frac{x}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{y^2}{4} + \frac{4}{4} \cdot y + \frac{4}{4} - \frac{4}{4}\right) + \frac{1}{16} = 0$$

disso

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{16} + \frac{y^2 + 4y + 4}{4} - 1 = 0$$

resulta em

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

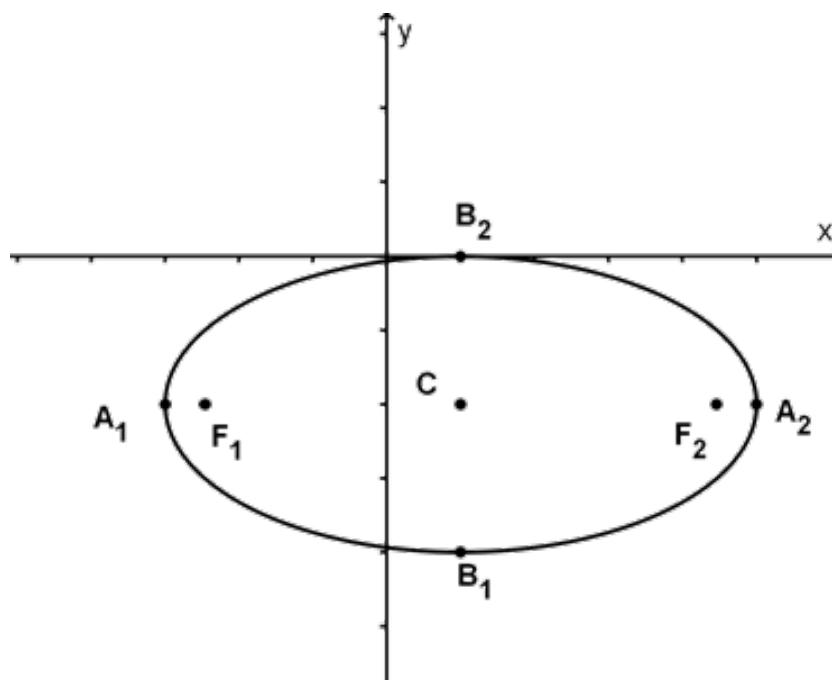
ou

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{[y-(-2)]^2}{4} = 1$$

que é a equação da elipse com centro em $C(1, -2)$.

Para determinar os focos, basta observar que $a^2 = 16$ e $b^2 = 4$. Da relação $a^2 + b^2 = c^2$, temos $c^2 = 16 - 4 = 12$, logo $c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Logo, os focos são $F_1(1 - 2\sqrt{3}, -2)$ e $F_2(1 + 2\sqrt{3}, -2)$.



Exemplo 4

Encontrar os vértices da elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{x}{8} + y + \frac{1}{16} = 0$. (Veja o exemplo anterior)

Lista de Exercícios

1) Encontrar uma equação da elipse de focos $F_1(0, -1)$ e $F_2(0, 1)$ e eixo maior 4.

2) Determinar os focos, os vértices e esboce as elipses cujas equações são:

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ c) $9x^2 + 4y^2 = 36$

3) Calcular a distância focal de uma elipse cujo eixo maior mede 10 e cujo eixo menor mede 8.

4) A órbita da Terra é uma elipse e o sol ocupa um dos focos. Sabendo que o eixo maior tem 153.493.000 Km e que a excentricidade é de 0,0167, calcular a menor e maior distância da Terra ao sol.

5) Ache uma equação da elipse cujos focos se encontram sobre o eixo das abscissas, dispostos simetricamente em relação à origem do sistema de coordenadas, e sabendo-se que:

a) O seu eixo maior é 5 e o menor é 2;

b) O seu eixo menor é 24 e distância focal é 10.

6) Calcular a área do quadrilátero em que dois vértices coincidam com os focos da elipse $x^2 + 5y^2 = 20$ e os dois outros com as extremidades do eixo menor.

7) Achar os pontos de interseção da reta $x + 2y - 7 = 0$ e da elipse $x^2 + 4y^2 = 25$.

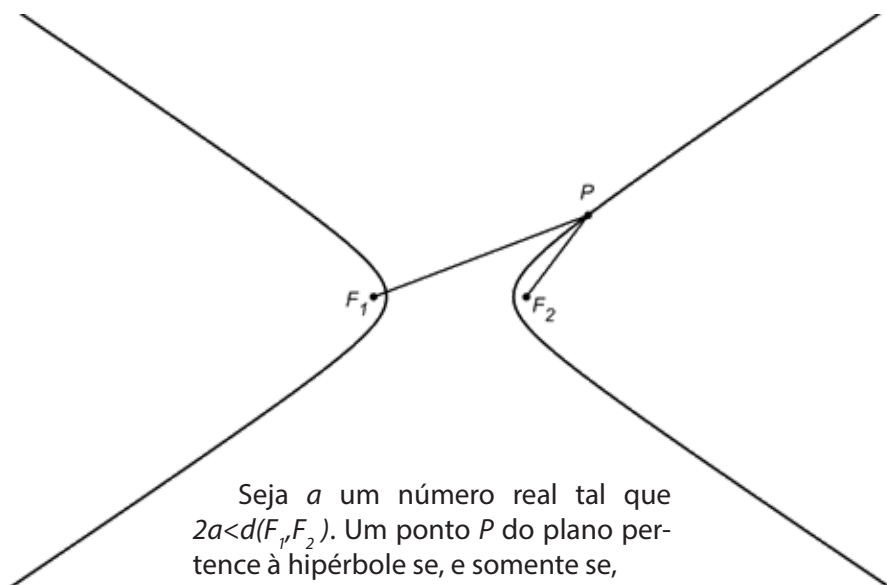
8) Obter a equação da elipse cujos vértices são $A_1(1, -7)$ e $A_2(1, 3)$; $B_1(-2, -2)$ e $B_2(4, -2)$.

9) Determinar os focos da elipse $\frac{(x-3)^2}{4} + (y+1)^2 = 1$.

10) Esboce a elipse $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$

Hipérbole

Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 . Hipérbole é o conjunto dos pontos do plano tais que a diferença das distâncias, em módulo, aos pontos F_1 e F_2 é constante.



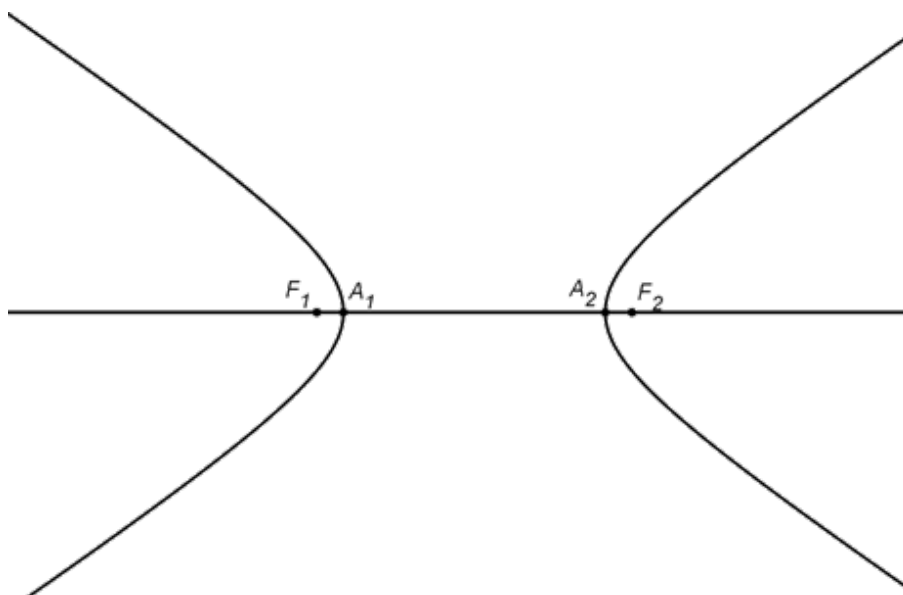
$$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| = 2a$$

A hipérbole é uma curva constituída por dois ramos e, observando a figura anterior, você pode notar o seguinte:

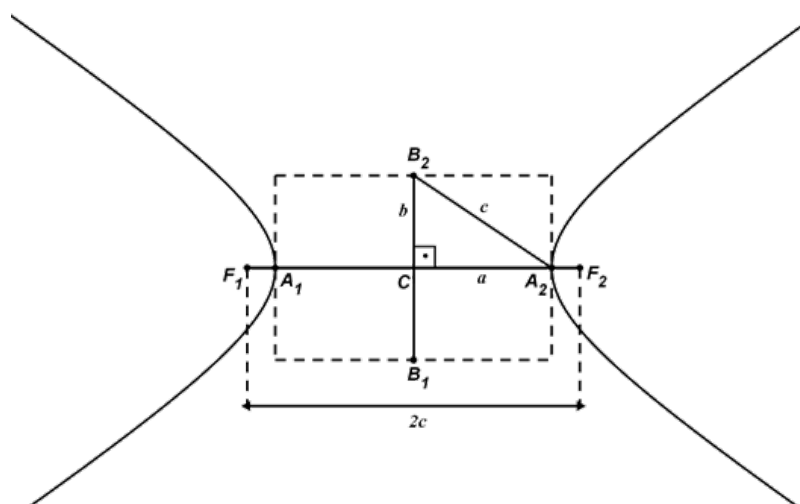
P pertence ao ramo da direita se $d(F_1, P) - d(F_2, P) = 2a$.

P pertence ao ramo da esquerda se $d(F_1, P) - d(F_2, P) = -2a$.

Os pontos F_1 e F_2 são denominados **focos** da hipérbole e $d(F_1, F_2) = 2c$ é a **distância focal**. A reta que contém os focos F_1 e F_2 intercepta a hipérbole em dois pontos, A_1 e A_2 , que são denominados **vértices** da hipérbole. O segmento $A_1 A_2$ é o **eixo real** da hipérbole.



O ponto médio do segmento $F_1 F_2$ é o centro da hipérbole.



Considere os pontos B_1 e B_2 pertencentes a mediatriz do segmento $F_1 F_2$, tais que $d(B_1, C) = d(B_2, C) = b$, onde b é determinado pela relação $c^2 = a^2 + b^2$. O segmento $B_1 B_2$ é o eixo imaginário da hipérbole.

Equação da Hipérbole

Encontraremos uma equação para a hipérbole com centro na origem do sistema de coordenadas e focos sobre o eixo x . Como $d(F_1, F_2) = 2c$, então as coordenadas dos focos são $F_1 (-c, 0)$ e $F_2 (c, 0)$, e um ponto $P(x, y)$ do plano pertence à hipérbole se, e somente se,

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

ou seja

$$|\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}| = 2a$$

disso

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Considerando

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

podemos escrever

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

elevando ao quadrado ambos os membros:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

desenvolvendo os quadrados perfeitos:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

efetuando as operações e isolando o radical:

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2$$

elevando ambos os membros ao quadrado:

$$a^2[(x-c)^2 + y^2] = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4$$

efetuando as operações

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

da relação

$$c^2 = a^2 + b^2$$

podemos escrever

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

e dividindo ambos os membros por a^2b^2 , obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que é a **equação da hipérbole** de centro na origem e focos sobre o eixo x.

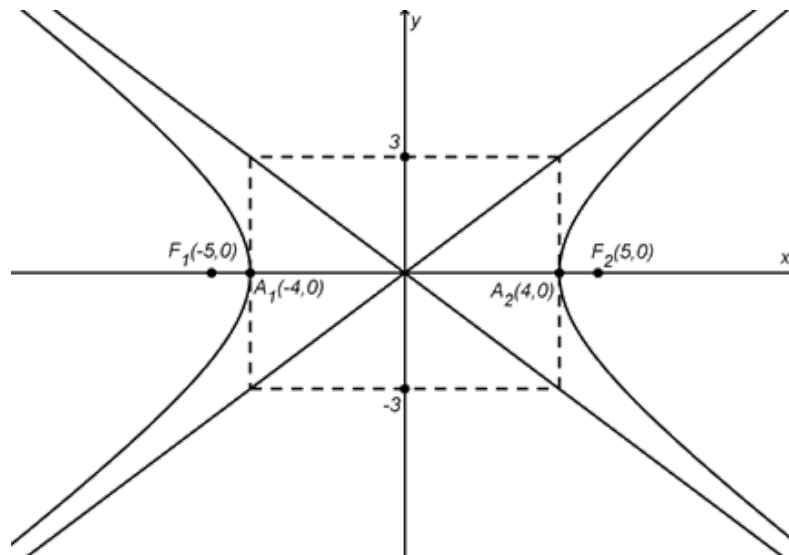
Exemplo 1

Encontre os focos e os vértices da hipérbole $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Solução:

Comparando a equação dada com a equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ observamos que $a^2=16$ e $b^2=9$, disso $a=4$ e $b=3$.

Lembre-se que os focos são $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, onde c pode ser determinado pela relação $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25$. $\therefore c = 5$. Então os focos são $F_1(-5,0)$ e $F_2(5,0)$. Os vértices são $A_1(-4,0)$ e $A_2(4,0)$.



Atividade

1) Desenvolva:

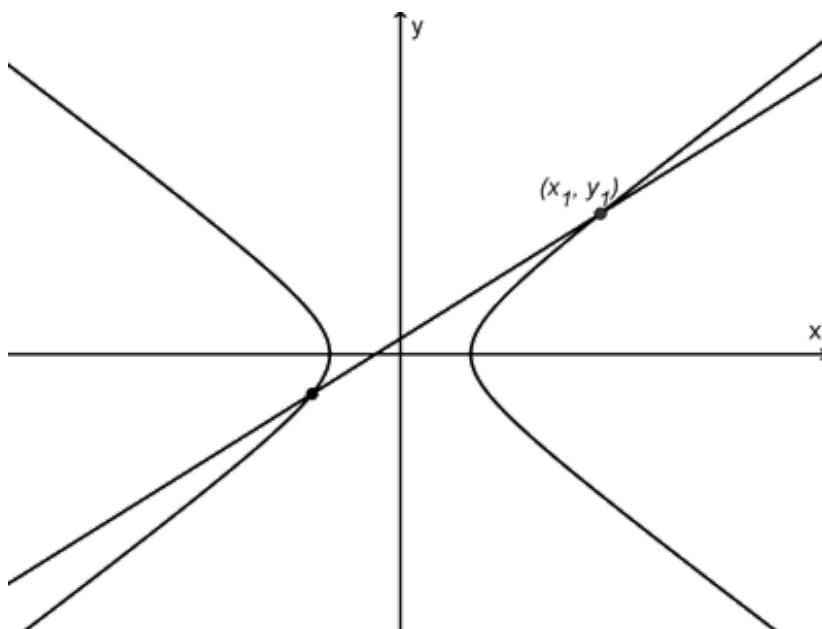
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -2a$$

2) Mostre que uma equação para a hipérbole com centro na origem do sistema de coordenadas e focos sobre o eixo y é:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Assíntota da Hipérbole

Seja $y=mx$ uma reta. Vamos determinar condições sobre a , b e m para que a reta $y=mx$ intercepte a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Veja a figura a seguir:



Suponhamos $P(x_1, y_1)$ seja um ponto de interseção da reta com a hipérbole. Temos que resolver o sistema:

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ y_1 = mx_1 \end{cases}$$

Dai,

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{mx_1^2}{b^2} = 1$$

Isolando x_1 :

$$x_1 = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2 m^2}} = \pm \frac{ab}{a \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - m^2}}$$

ou

$$x_1 = \pm \frac{b}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - m^2}}$$

Para que x_i tenha valor real, isto é, para que a reta intercepte a hipérbole, é necessário e suficiente que

$$\frac{b^2}{a^2} - m^2 > 0$$

Ou seja

$$m^2 < (b^2/a^2)$$

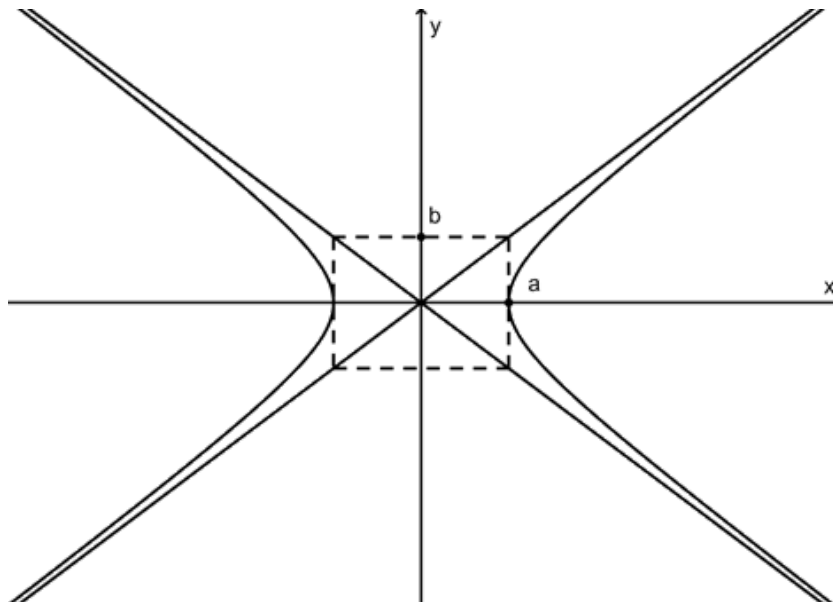
Sendo a e b números positivos, segue que:

$$(-b/a) < m < (b/a)$$

Portanto para que a reta $y=mx$ intercepte a hipérbole $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ sua declividade deve estar compreendida entre $-b/a$ e b/a . As retas do tipo $y=mx$ com declividade $-b/a$ e b/a são chamadas assíntotas da hipérbole, isto é, as **assíntotas de uma hipérbole** são as retas:

$$y = \frac{b}{a}x \text{ e } y = -\frac{b}{a}x$$

Veja a figura a seguir:

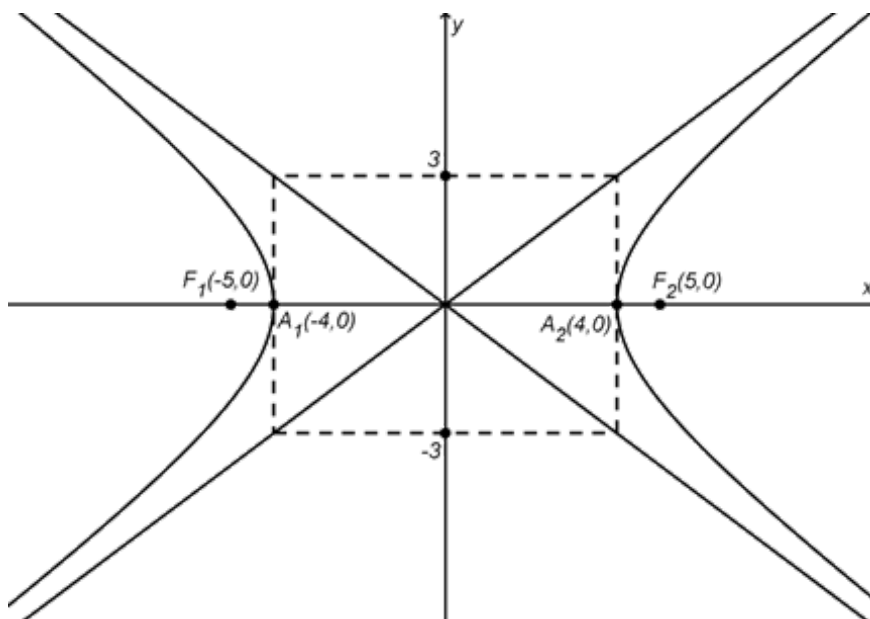


Exemplo 2

Encontre as assíntotas da hipérbole $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

Solução:

Comparando a equação dada com a equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, observamos que $a^2=16$ e $b^2=9$, disso $a=4$ e $b=3$.



As assíntotas são as retas $y = (b/a)x$ e $y = (-b/a)x$

No nosso caso:

$$y = (3/4)x \text{ e } y = (-3/4)x.$$

Atividade

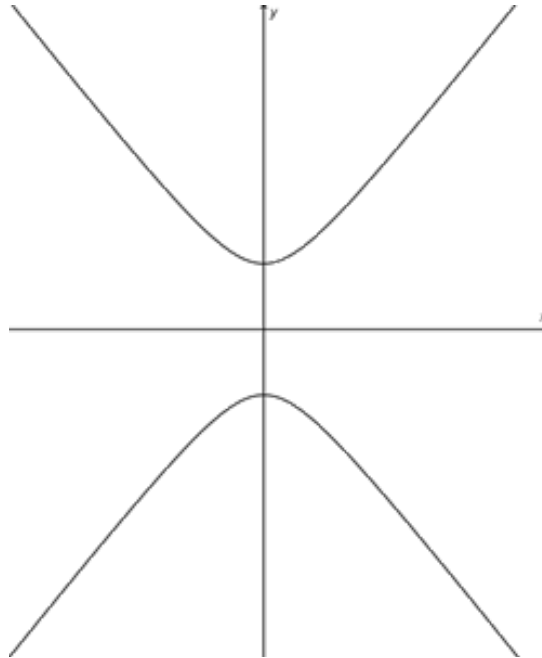
Se os focos, da hipérbole com centro na origem, estão sobre o eixo y , digamos $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$, um ponto $P(x, y)$ pertence à hipérbole se, e somente se, $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$

Efetue as contas e obtenha a equação da hipérbole com centro na origem e focos sobre o eixo y :

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Mostre que as assíntotas da hipérbole, neste caso, são as retas:

$$y = \frac{a}{b}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{a}{b}x$$



Exemplo 3

Encontre os focos, os vértices e as assíntotas da hipérbole $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$

Solução:

Comparando a equação dada com a equação $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

observamos que $a^2 = 4$ e $b^2 = 16$, disso $a=2$ e $b=4$.

Neste caso, os focos são $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$ onde c é determinado na relação

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 16 = 20 \therefore c = \sqrt{20}$$

Então os focos são $F_1(0, -\sqrt{20})$ e $F_2(0, \sqrt{20})$.

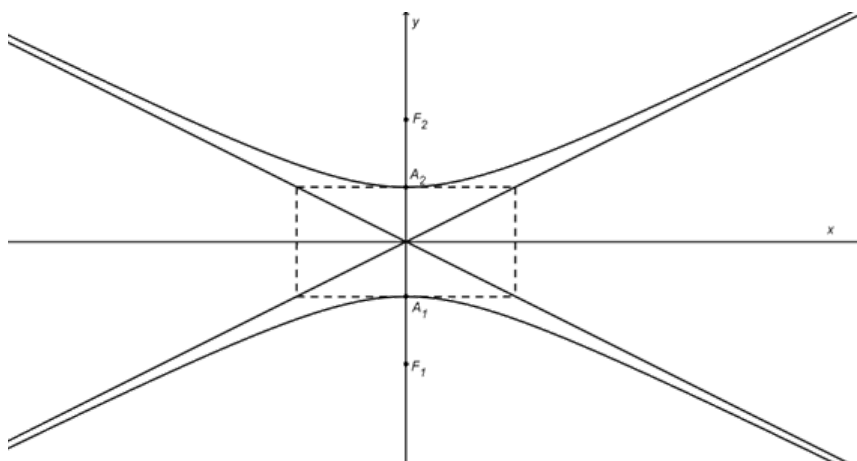
Os vértices são $A_1(0, -2)$ e $A_2(0, 2)$.

As assíntotas são as retas

$$y = \frac{a}{b}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{a}{b}x$$

no nosso caso:

$$y = -\frac{1}{2}x \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{2}x$$



Lista de Exercícios

1) Ache uma equação da hipérbole de focos $F_1(-3,0)$ e $F_2(3,0)$ e vértices $A_1(-2,0)$ e $A_2(2,0)$.

2) Determine os focos, os vértices, as equações das assíntotas e esboce as hipérboles cujas equações são:

a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

b) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1$

c) $9x^2 - 4y^2 = 36$

d) $y^2 - x^2 = 1$

3) Qual é a equação da hipérbole que tem o centro na origem do sistema de coordenadas, o eixo real sobre o eixo x , $2b = 6$ e excentricidade de $5/4$?

4) Hipérbole equilátera é aquela em que $a=b$, ou seja, a medida do eixo real é igual ao do eixo imaginário. Quais são as equações das assíntotas de uma hipérbole equilátera $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$

5) Ache a equação da hipérbole equilátera que passa pelo ponto $P(4,-2)$, o centro coincide com a origem do sistema de coordenadas e os focos estão sobre o eixo x .

6) Uma hipérbole tem um de seus vértices em $A(3,0)$ e as equações de suas assíntotas são $2x-3y=0$ e $2x+3y=0$. Determine uma equação da hipérbole.

7) Demonstre que a distância de um foco da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a sua assíntota é b .

8) Determine os pontos de interseção da reta $4x-3y-16=0$ e da hipérbole

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$$

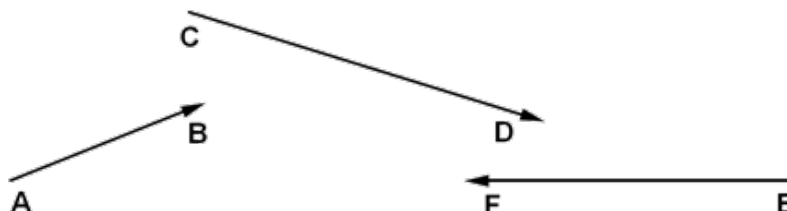
9) Ache os focos da hipérbole $\frac{(x-1)^2}{7} - \frac{(y-2)^2}{2} = 1$. Esboce essa hipérbole e suas assíntotas

10) Calcule as equações das assíntotas da hipérbole $y^2 - x^2 + 4y + 4x - 1 = 0$.

Vetores

Uma abordagem geométrica

Um segmento de reta orientado é determinado por um par de pontos orientados, veja a figura a seguir



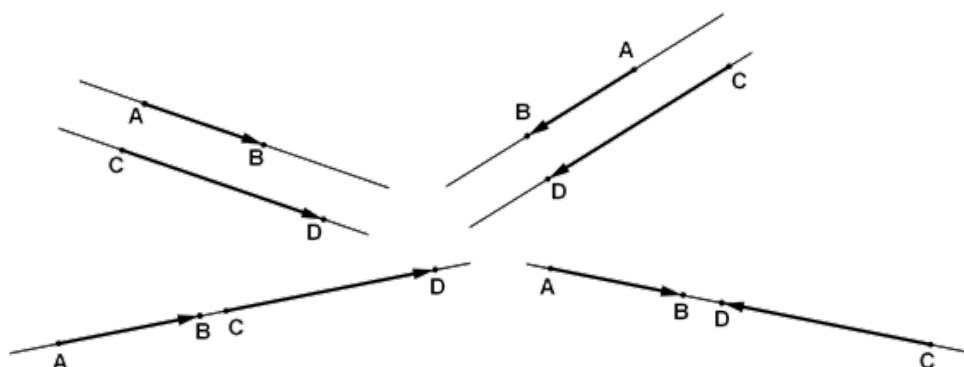
O ponto inicial do segmento é a sua **origem** e o ponto final é a sua **extremidade**.

Para indicar um segmento de origem em A e extremidade em B usaremos a notação AB . Na figura anterior você pode observar os segmentos de reta orientados: AB , CD , e EF . Note que quando fixamos a origem A e a extremidade B de um segmento de reta orientado estamos estabelecendo um **sentido** de percurso da origem para a extremidade, uma **direção**, que é a direção da reta que passa por A e B, e também um **comprimento**.

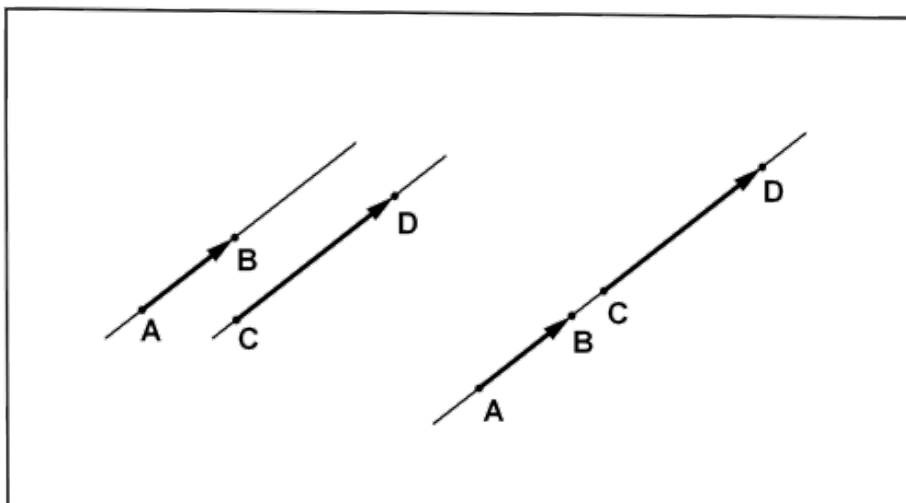


Chamamos de **segmento nulo** o segmento de reta orientado cuja extremidade coincide com a origem. Ao segmento nulo não associamos um sentido e nem uma direção e dizemos que seu comprimento é zero.

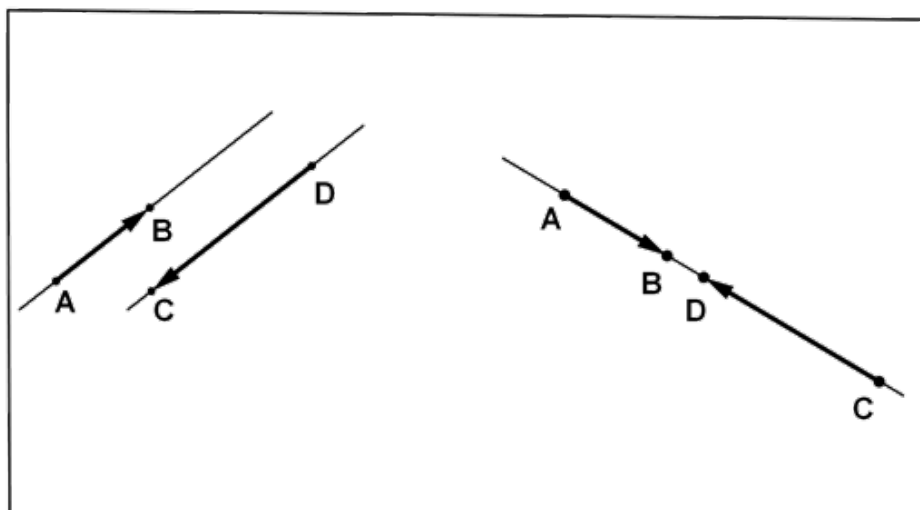
Dois segmentos orientados AB e CD têm a **mesma direção** se a reta r determinada pelos pontos A e B e a reta s determinada pelos pontos C e D são paralelas ou coincidentes, veja as figuras a seguir.



Quando dois segmentos de reta orientados têm a mesma direção podemos comparar os seus sentidos de percurso. Em uma das situações ilustradas a seguir, dizemos que AB e CD tem o **mesmo sentido**.



Já as situações ilustradas a seguir mostram segmentos de reta orientados AB e CD que possuem **sentidos** de percurso **contrários**.



Dado um segmento de reta orientado AB o segmento BA cuja origem é B e extremidade é A é denominado segmento oposto de AB . Você deve notar que AB e BA tem a mesma direção, sentidos de percursos opostos e o mesmo comprimento.

Segmentos Equipolentes e Vetores

Dizemos que dois segmentos de reta orientados AB e CD são equipolentes, se

i) ou ambos são nulos

ii) ou nenhum é nulo, e têm mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento.

Usaremos a notação $AB \sim CD$ para indicar que os segmentos de reta orientados AB e CD são equipolentes, e também podemos dizer que AB é equipolente a CD .



Um segmento de reta orientada AB não é equipolente ao seu segmento oposto BA , pois apesar de AB e BA possuírem mesma direção e mesmo comprimento eles tem sentidos contrários.

Você pode concluir da definição que um segmento AB é equipolente a ele mesmo e indicamos por $AB \sim AB$. Essa é chamada propriedade reflexiva da equipolência.

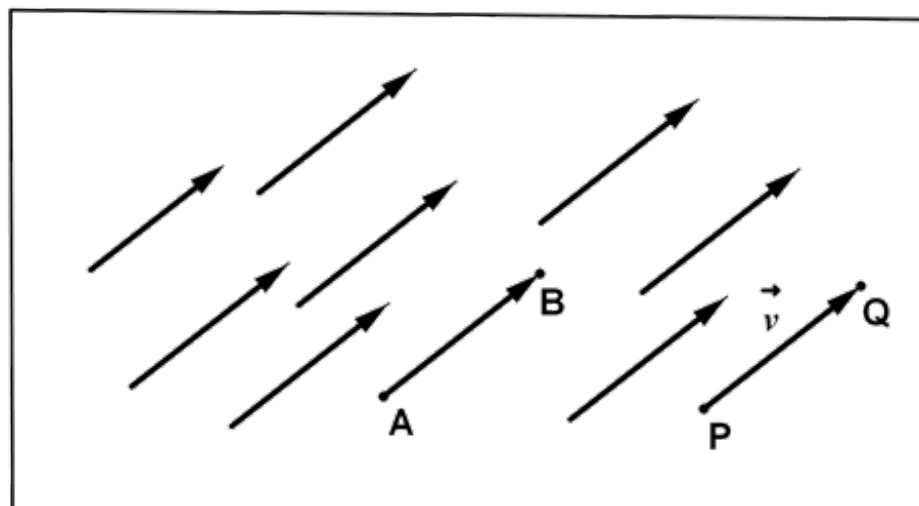
Note também, que se AB é equipolente a CD e então CD é equipolente a AB caracterizando a propriedade simétrica da equipolência: Se $AB \sim CD$ então $CD \sim AB$.

Decorre da definição que se AB é equipolente a CD e por sua vez CD é equipolente a EF , então AB é equipolente a EF . Podemos dizer assim: se AB e CD têm mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento e por sua vez CD e EF tem mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento, então AB e EF também têm mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento. Essa é a propriedade transitiva da equipolência: Se $AB \sim CD$ e $CD \sim EF$, então $AB \sim EF$.

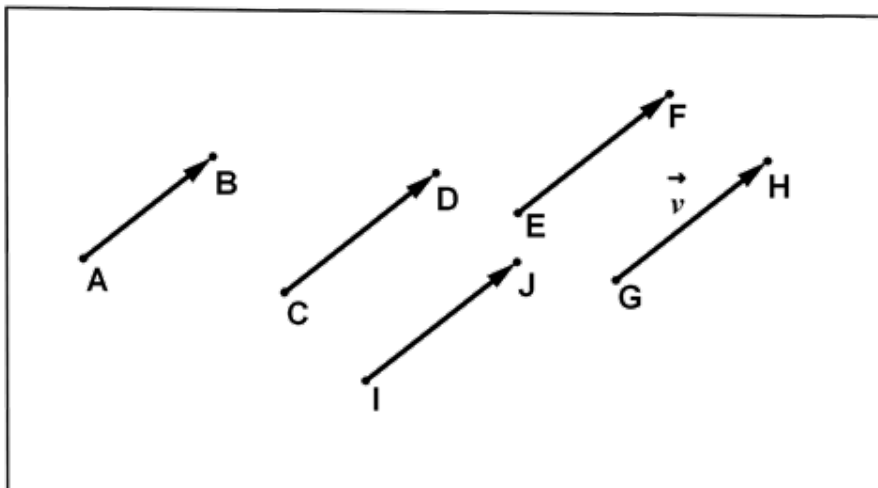
Fixado um segmento de reta orientado AB , o conjunto de todos os segmentos equipolentes a AB determina um vetor que será indicado por $\vec{v}$ ou $\vec{AB}$. Podemos escrever:

$$\vec{v} = \{PQ / PQ \sim AB\}$$

onde PQ é segmento qualquer do conjunto. Veja a figura a seguir:



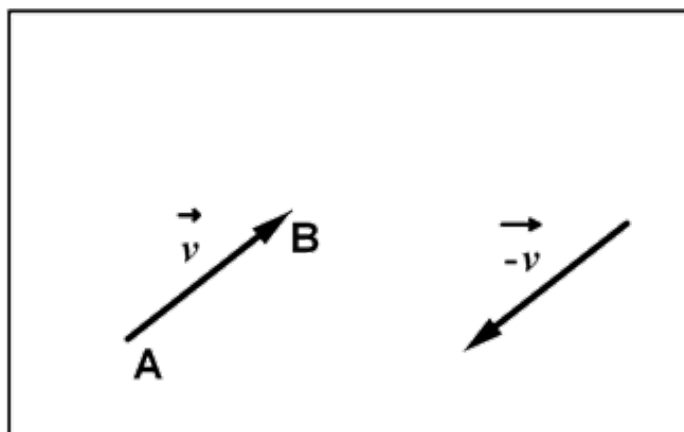
Você deve notar que quaisquer dois segmentos do conjunto $\vec{v}$ têm mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento, diferem possivelmente, apenas pela sua localização, assim não vamos distingui-los. Dessa forma, da definição decorre que um vetor $\vec{v}$ é determinado por uma infinidade de segmentos de reta orientados e qualquer um desses segmentos determina o mesmo vetor. Podemos então, escolher dentre essa infinidade de segmentos um representante do vetor $\vec{v}$. A figura a seguir ilustra um vetor $\vec{v}$ determinado pelo segmento AB .



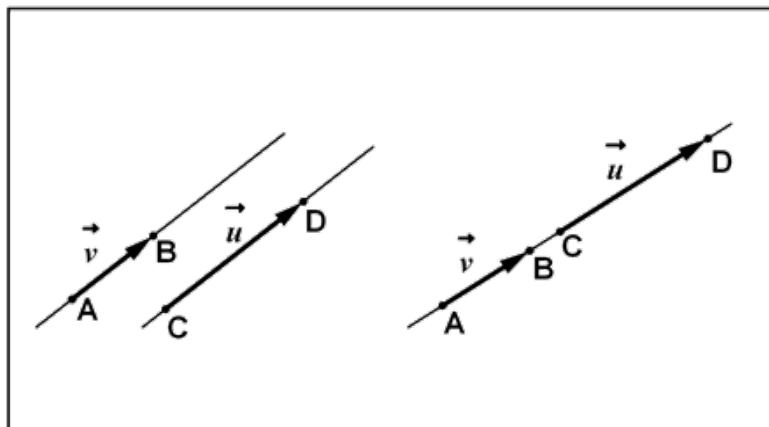
Todos os segmentos têm mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento e podemos escolher, por exemplo, o segmento GH para representar o vetor $\vec{v}$. O que deve ficar claro para você é que se tivéssemos escolhido outro segmento para representar o vetor $\vec{v}$ as características de direção, sentido e comprimento seriam as mesmas do segmento AB . Desta forma, as características de um vetor $\vec{v}$ são as mesmas de qualquer um de seus representantes.

NOTAÇÕES E TERMINOLOGIAS

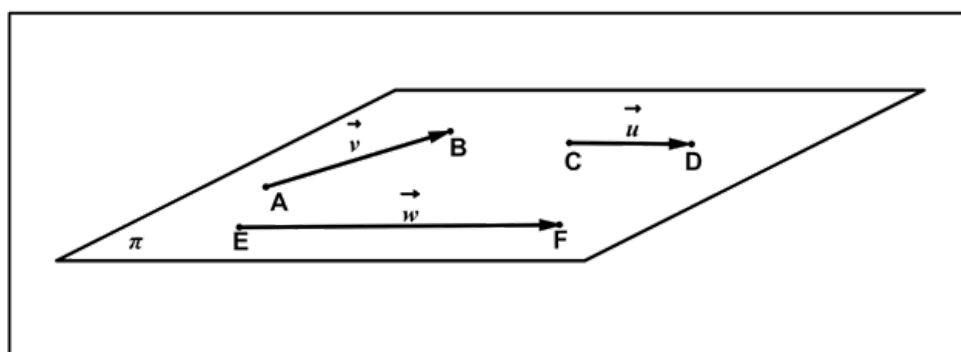
- 1) Vetor nulo é o vetor cujo representante é um segmento nulo e será indicado por $\vec{0}$.
- 2) Dois vetores $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ são iguais se, e somente se, $AB \sim CD$.
- 3) O módulo ou comprimento de um vetor v é o comprimento de um de seus representantes e será denotado por $|\vec{v}|$ ou $|\vec{AB}|$.
- 4) O oposto de um vetor $\vec{v} = \vec{AB}$ é o vetor $\vec{BA}$ que será indicado por $-\vec{AB}$ ou $-\vec{v}$.



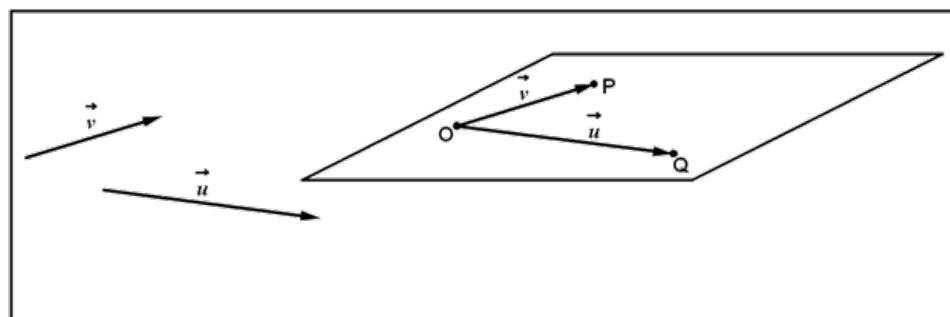
5) Dizemos que os vetores $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$ são colineares ou paralelos se tiverem representantes AB e CD que têm a mesma direção. Indica-se por $\vec{v} // \vec{u}$.



6) Se os representantes AB , CD e EF dos vetores $\vec{v}$, $\vec{u}$ e $\vec{w}$, respectivamente são pertencentes a um mesmo plano π , dizemos que os vetores $\vec{v}$, $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são **coplanares**.

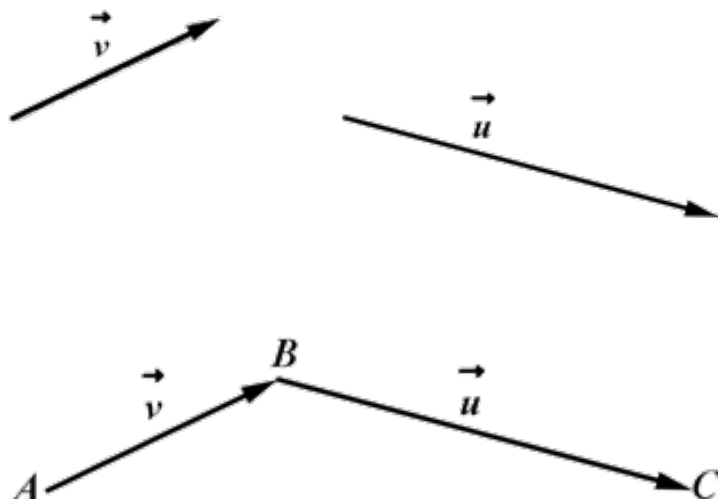


Dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ sempre são coplanares, para notar isso faça o seguinte, escolha representantes de $\vec{v}$ e $\vec{u}$ com a mesma origem. Os pontos O , P e Q determinam um plano.

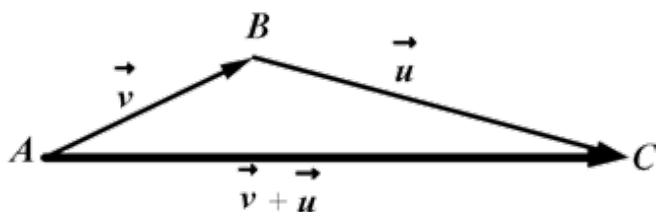


Adição de Vetores

Considere os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ representados pelos segmentos de reta orientados tais que a extremidade de $\vec{v}$ coincide com a origem de $\vec{u}$. Assim, podemos escrever $\vec{v} = \vec{AB}$ e $\vec{u} = \vec{BC}$.



A soma dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ é o vetor $\vec{v} + \vec{u}$ determinado pelo segmento de reta orientado AC:

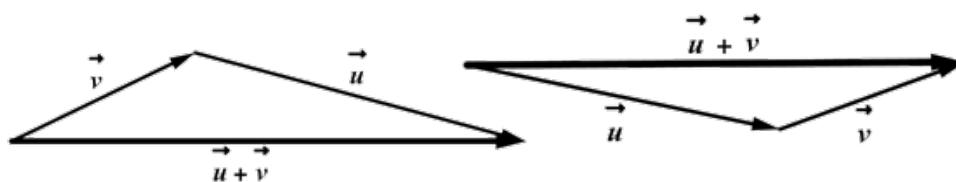


Atividade I

Dados os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ descreva o procedimento que deve ser seguido para encontrar o vetor soma $\vec{v} + \vec{u}$.

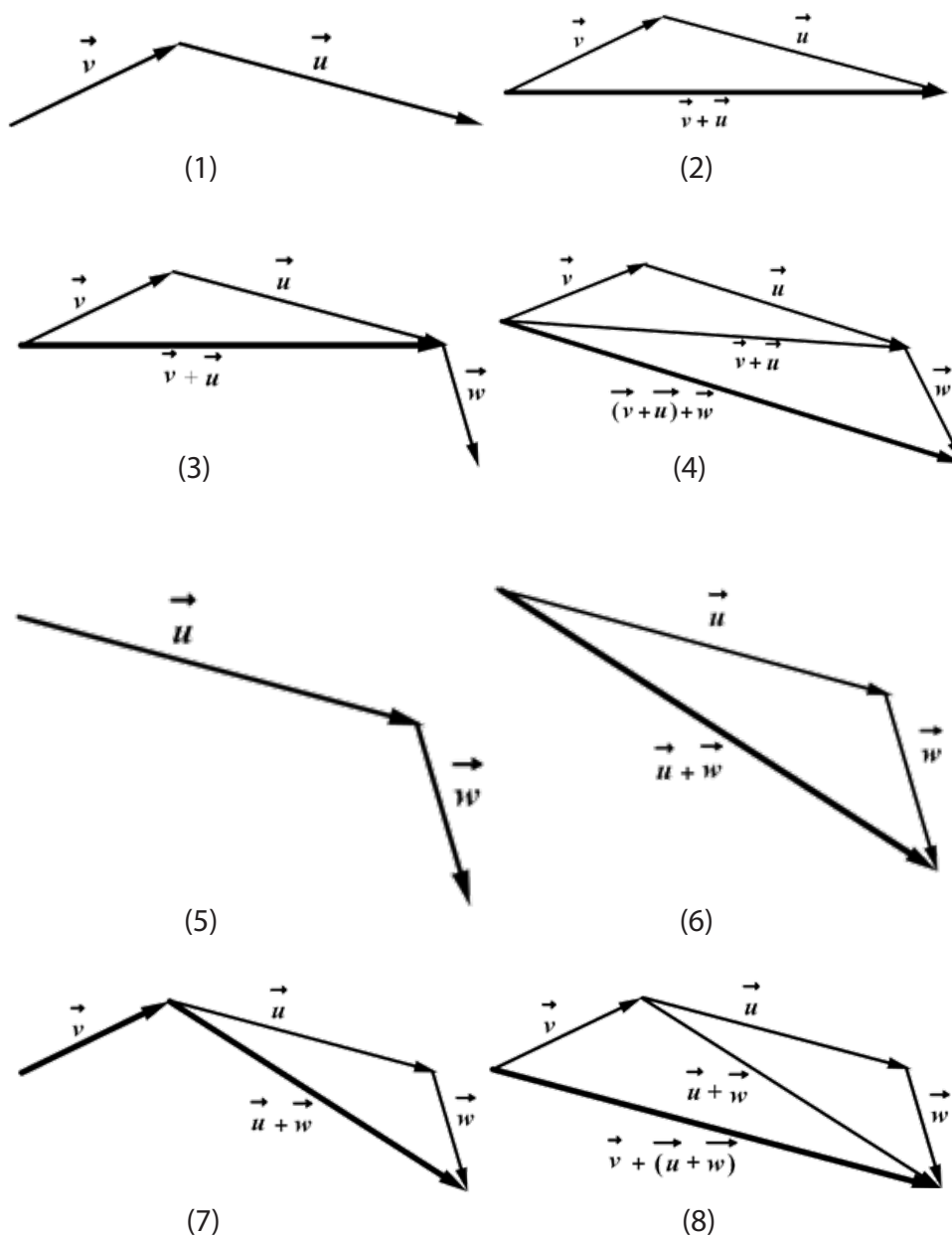
Propriedades da Adição

1) Comutativa: $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$



Note nas figuras anteriores que os vetores $\vec{v} + \vec{u}$ e $\vec{u} + \vec{v}$ possuem mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento, e isso nos leva a concluir que $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$.

2) Associativa: $(\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w})$. Acompanhe a evolução das figuras



Observe nas figuras 4 e 8 que os vetores $(\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w}$ e $\vec{v} + (\vec{u} + \vec{w})$ tem mesma direção sentido e comprimento, o que nos permite escrever:

$$(\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w}).$$

3) Elemento neutro: 0

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}.$$

Lembre-se que o vetor nulo 0 é representado pelo segmento nulo cuja origem e extremidade coincidem.

4) Elemento Oposto: Dado um vetor v , existe um vetor que somado a v tem como resultado o vetor nulo, esse vetor é o oposto de v indicado por $-v$:

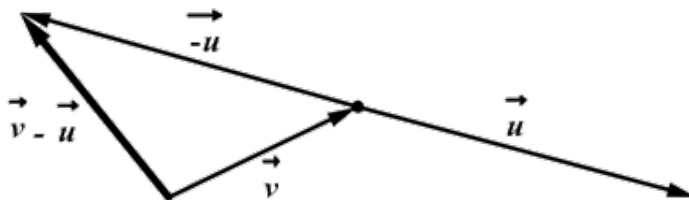
$$\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}.$$

Diferença de Vetores

A propriedade do elemento oposto nos sugere definir a diferença de dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ da seguinte forma:

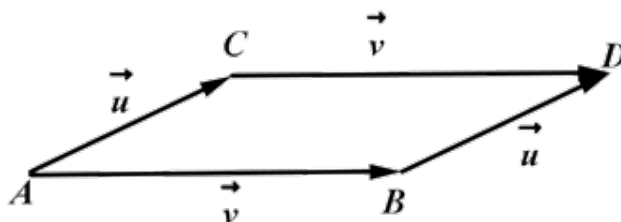
$$\vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u})$$

isto é, a diferença $\vec{v} - \vec{u}$ é a soma dos vetores $\vec{v}$ e $-\vec{u}$ (oposto de $\vec{u}$). Veja a figura

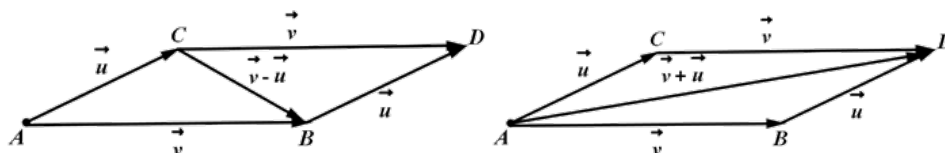


Regra do Paralelogramo

Ao escolhermos representantes dos vetores v e u com origens coincidentes, digamos $\vec{v} = \vec{AB}$ e $\vec{u} = \vec{AC}$, podemos construir um paralelogramo $ABDC$ como na figura a seguir:



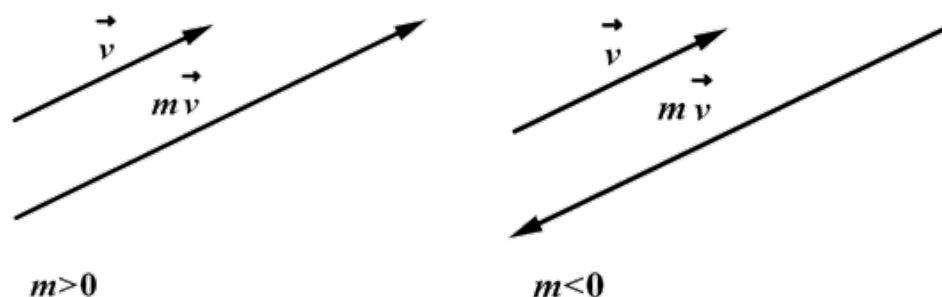
Você deve notar que o segmento de reta orientada BD também é um representante do vetor $\vec{u}$ e que o segmento de reta orientado CD também é um representante do vetor $\vec{v}$. E disso, verificamos que o segmento de reta AD representa a soma $\vec{v} + \vec{u}$ e o segmento CB representa a diferença $\vec{v} - \vec{u}$.



Multiplicação por um número real

Dado um número real $m \neq 0$ e um vetor não nulo $\vec{v}$, o vetor indicado por $m\vec{v}$ é denominado produto do número real m pelo vetor $\vec{v}$ e é tal que:

- 1) $\vec{v}$ e $m\vec{v}$ têm a mesma direção ($\vec{v}$ e $m\vec{v}$ são paralelos).
- 2) Se $m > 0$, então $\vec{v}$ e $m\vec{v}$ tem o mesmo sentido e se $m < 0$, então $\vec{v}$ e $m\vec{v}$ tem sentido contrário.
- 3) $|m\vec{v}| = |m| |\vec{v}|$ (o módulo de $m\vec{v}$ é o módulo de m vezes o módulo do vetor $\vec{v}$).



OBSERVAÇÃO

Se $m = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $m\vec{v} = \vec{0}$.

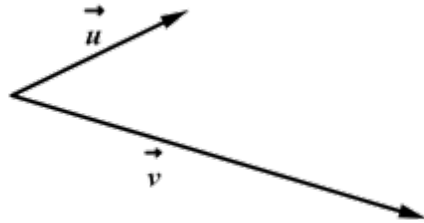
Propriedades da Multiplicação por um número real

Se $\vec{v}$ e $\vec{u}$ são vetores quaisquer que e m e n números reais.

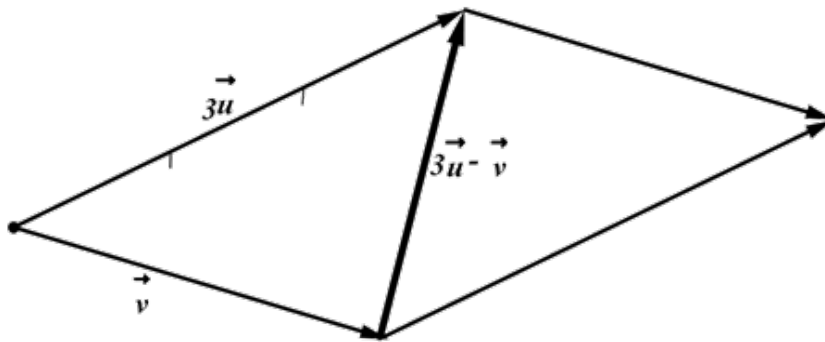
- 1) $m(n\vec{v}) = (mn)\vec{v}$.
- 2) $(m+n)\vec{v} = m\vec{v} + n\vec{v}$.
- 3) $m(\vec{v} + \vec{u}) = m\vec{v} + m\vec{u}$.
- 4) $1\vec{v} = \vec{v}$.

Exemplo 1

Dados os vetores $\vec{v}$, $\vec{u}$ e $\vec{w}$ representados pelos segmentos a seguir, construa o vetor $3\vec{u} - \vec{v}$

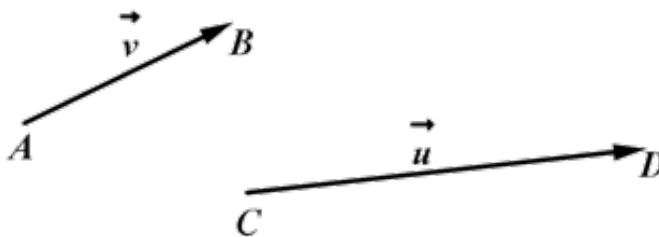


Solução:

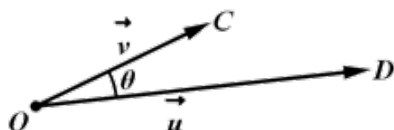


Ângulo entre dois vetores

Considere os vetores não nulos $\vec{v}$ e $\vec{u}$ representados pelos segmentos AB e CD , respectivamente.



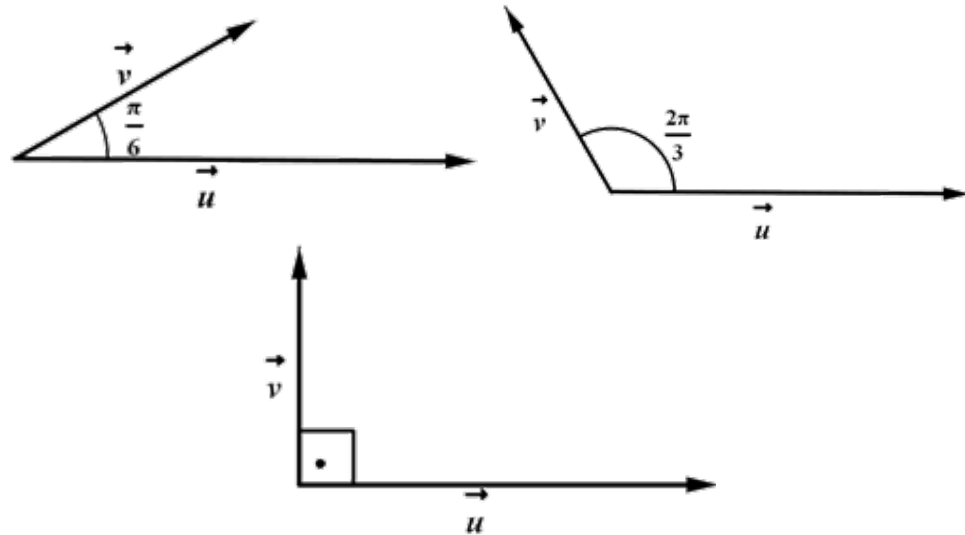
Podemos escolher representantes para $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com origem no mesmo ponto.



O **ângulo** entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ é o ângulo θ formado pelas semi-retas OC e OD e tal que $0 \leq \theta \leq \pi$.

Exemplo 2

Dados os vetores $\vec{v}$, $\vec{u}$ e $\vec{w}$ representados pelos segmentos a seguir, construa o vetor $3\vec{u} - \vec{v}$



Observação: Se $\theta = \pi/2$, dizemos que os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ são ortogonais e indicamos $\vec{v} \perp \vec{u}$. O vetor nulo é considerado ortogonal a qualquer vetor.

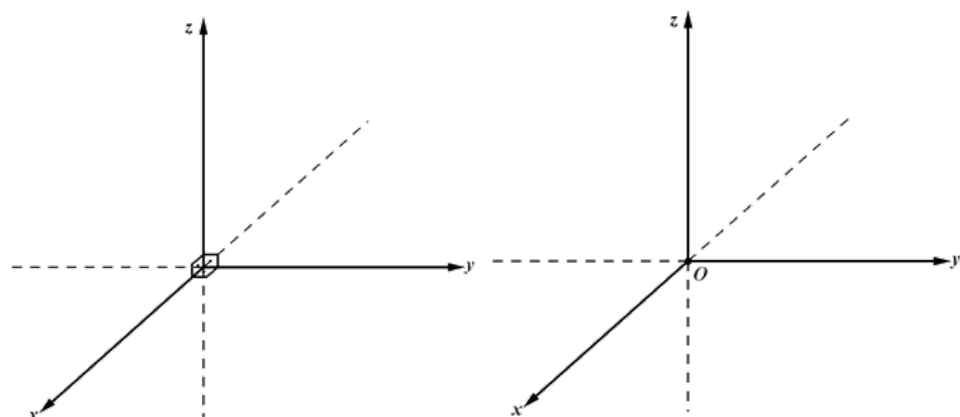
Atividade II

Sendo θ o ângulo entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$, ilustre cada uma das situações abaixo:

- 1) Se $\theta=0$, então $\vec{v}$ e $\vec{u}$ têm a mesma direção e sentidos contrários.
- 2) Se $\theta=0$, então $\vec{v}$ e $\vec{u}$ têm mesma direção e mesmo sentido.
- 3) O ângulo formado pelos vetores $\vec{v}$ e $-\vec{u}$ é o suplemento do ângulo entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$.

O Espaço Tridimensional

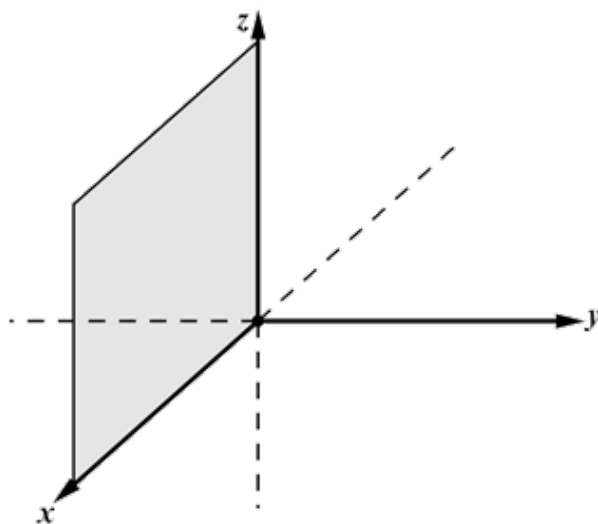
Considere três eixos orientados x, y e z perpendiculares entre si que se interceptam na origem O como mostra a figura abaixo:



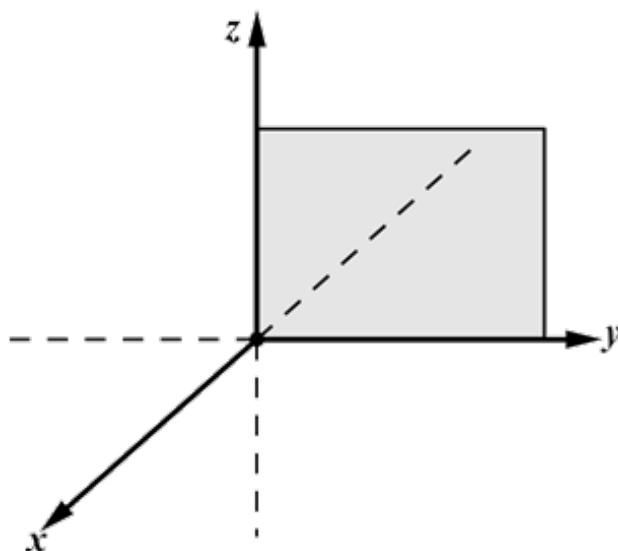
Tomemos sobre os eixos x, y e z unidades iguais e o sentido positivo como na figura anterior.

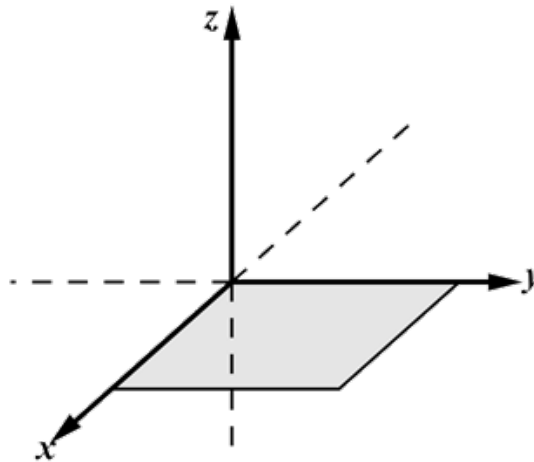
Dois eixos que se interceptam determinam um plano. Note que os eixos x, y e z definem três planos, coordenados. Veja as três situações a seguir.

- 1) Plano xz perpendicular ao eixo y .



- 2) Plano yz perpendicular ao eixo x .



3) Plano xy perpendicular o eixo z .

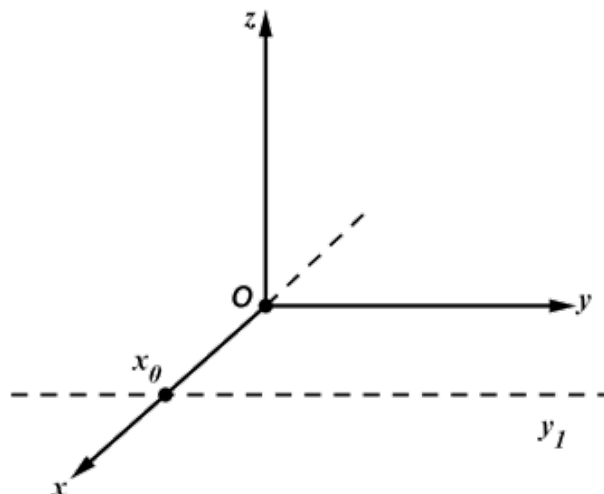
Os pontos P do espaço estão em **correspondência biunívoca** com as ternas ordenadas de números reais (x,y,z) . Para estabelecer essa correspondência veja a seguinte construção:

Atividade III

Dada uma terna ordenada de números reais (x_0, y_0, z_0) determine geometricamente o ponto P do espaço que está em correspondência com essa terna.

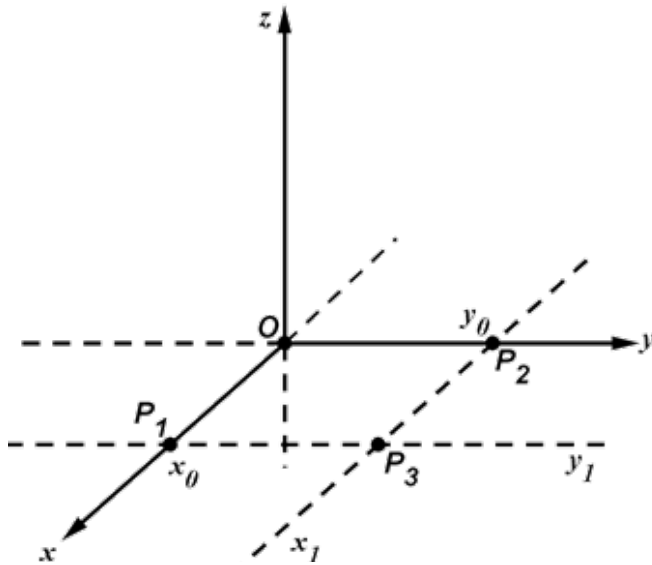
Para representar um ponto no espaço seguiremos um procedimento análogo ao feito no plano, porém com um passo a mais. Considere a terna ordenada de números reais (x_0, y_0, z_0) , vamos descrever o procedimento que mostra que essa terna corresponde a um ponto no espaço tridimensional. Para isso, considere um sistema de coordenadas tridimensional e podemos fazer o seguinte:

1º) Marque sobre o eixo x o valor x_0 . Trace a reta y_1 paralela ao eixo y e passando por x_0 .



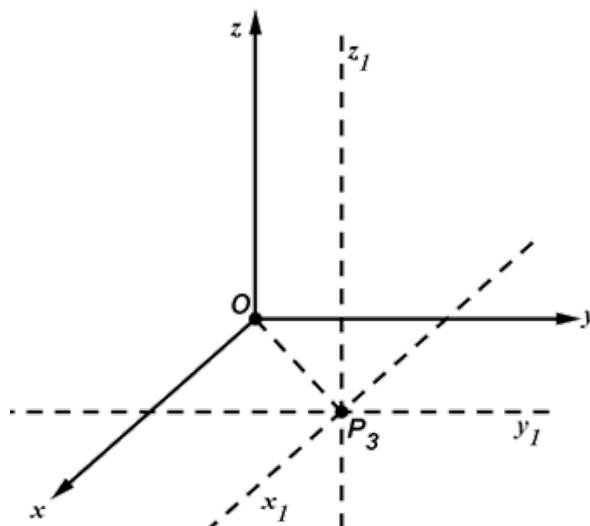
O ponto sobre o eixo x em correspondência com o número real x_0 é $P_1(x_0, 0, 0)$.

2º) Agora, sobre o eixo y marque o valor y_0 , com isso conseguimos o ponto P_2 $(0, y_0, 0)$. Passando por P_2 , trace a reta x_1 paralela ao eixo x .

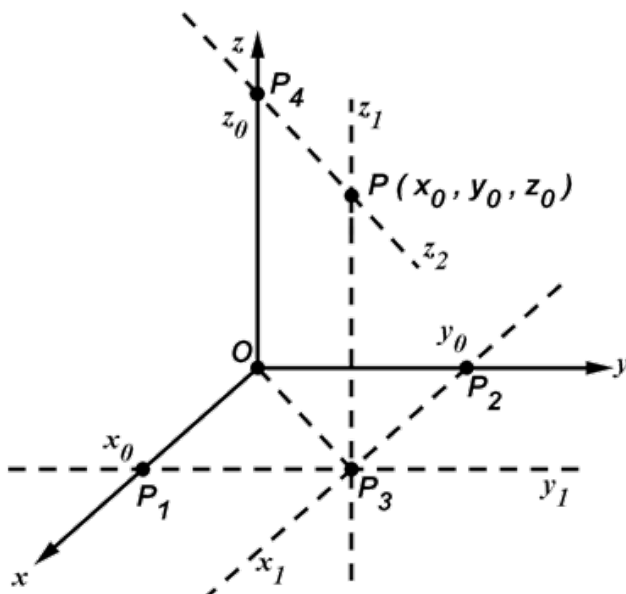


Note que as retas x_1 e y_1 se interceptam em um ponto P_3 e, esse ponto tem coordenadas $(x_0, y_0, 0)$. Os pontos O, P_1, P_3, P_2 determinam um paralelogramo no plano xy .

3º) Pelo ponto P_3 trace a paralela z_1 ao eixo z e, também, a diagonal OP_3 do paralelogramo $OP_1P_3P_2$.



4º) Sobre o eixo z marque o valor z_0 determinando assim o ponto $P_4(0, 0, z_0)$ sobre o eixo z . Passando por P_4 , trace a paralela z_2 à diagonal OP_3 :



As retas z_1 e z_2 se interceptam no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$.

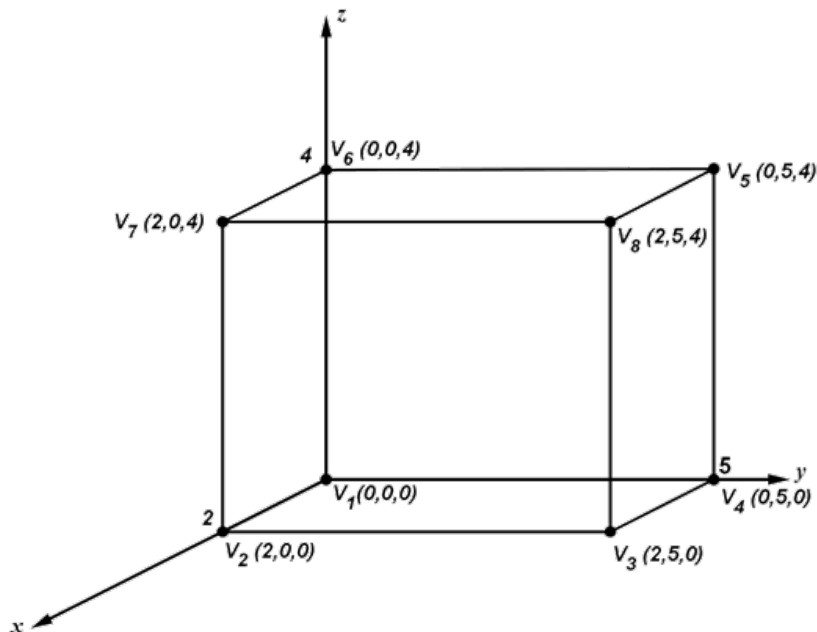
Para estabelecer a **correspondência biunívoca** a construção que acabamos de fazer deve ser feita no sentido inverso, isto é, dado um ponto P do espaço temos que determinar a terna ordenada de números reais que o representa. Tente fazer!



Usaremos a notação $P(x,y,z)$ para denotar um ponto do espaço tridimensional. Os números x , y e z constituem as coordenadas de P e são chamados de abscissa, ordenada e cota, respectivamente. Dessa forma estabelecemos uma correspondência biunívoca entre os pontos do espaço tridimensional e o conjunto de ternas ordenadas de números reais (x,y,z) . O que acabamos de construir é chamado de sistema de coordenadas espaciais.

Exemplo 3

Na figura a seguir estão representados no espaço tridimensional os vértices de um paralelepípedo de dimensões: altura 4, largura 3 e profundidade 2, cujo um dos vértices coincide com a origem do sistema de coordenadas.

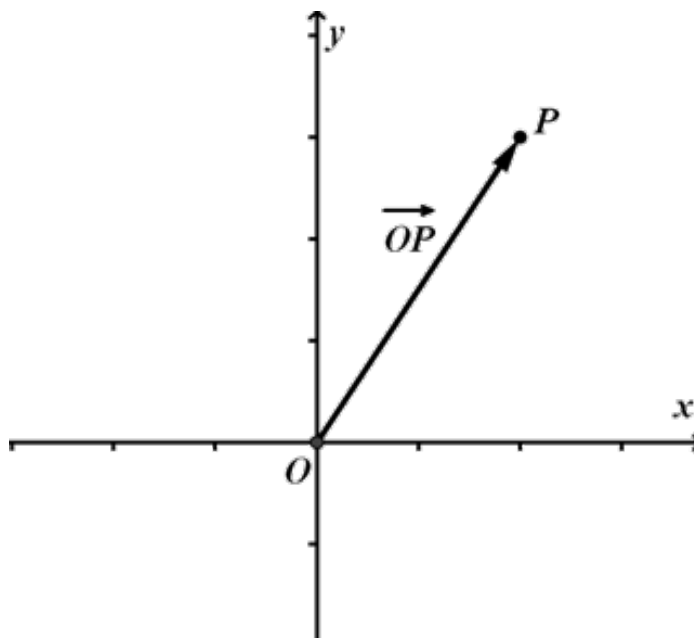


Observações:

$V_2(2,0,0)$ está sobre o eixo x ; $V_3(2,5,0)$ está no plano xy ; $V_4(0,5,0)$ está no eixo y ; $V_5(0,5,4)$ está no plano yz ; $V_6(0,0,4)$ está no eixo z ; $V_7(2,0,4)$ está no plano xz .

Vetores no Plano

Cada par ordenado de números reais (x, y) está em correspondência com um ponto P do plano. À par (x, y) podemos fazer corresponder um **vetor no plano** com origem em O e extremidade em P : $\vec{OP}$. Veja a figura:



Então podemos definir: um vetor no plano é um par ordenado de números reais (x, y) e usaremos a notação $\vec{v}$ para indicar um vetor no plano. Os números reais x e y são as componentes do vetor $\vec{v}$.

Adição de Vetores

Sejam $\vec{v} = (a_1, b_1)$ e $\vec{u} = (a_2, b_2)$ vetores no plano. Como segue a soma de $\vec{v}$ e $\vec{u}$ é o vetor $\vec{v} + \vec{u}$, onde

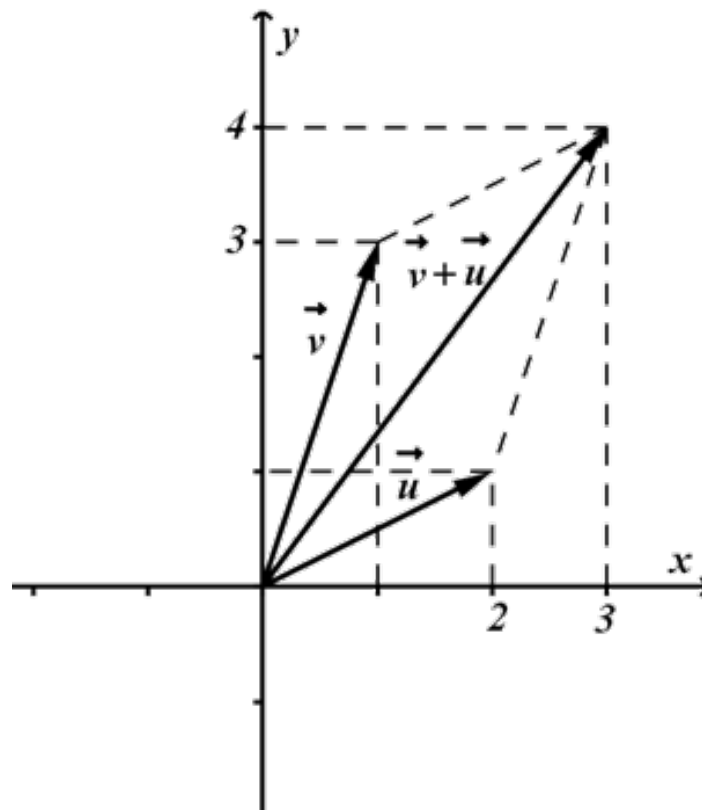
$$\vec{v} + \vec{u} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

Exemplo 4

Dados os vetores $\vec{v} = (1, 3)$ e $\vec{u} = (2, 1)$ determine $\vec{v} + \vec{u}$. Faça um esboço e verifique a regra do paralelogramo.

Solução:

Por definição $\vec{v} + \vec{u} = (1+2, 3+1) = (3, 4)$



Exemplo 5

Dados os vetores $\vec{v} = (-1, 2)$ e $\vec{u} = (3, 4)$ determine $\vec{v} - \vec{u}$, faça um esboço e verifique a regra do paralelogramo.

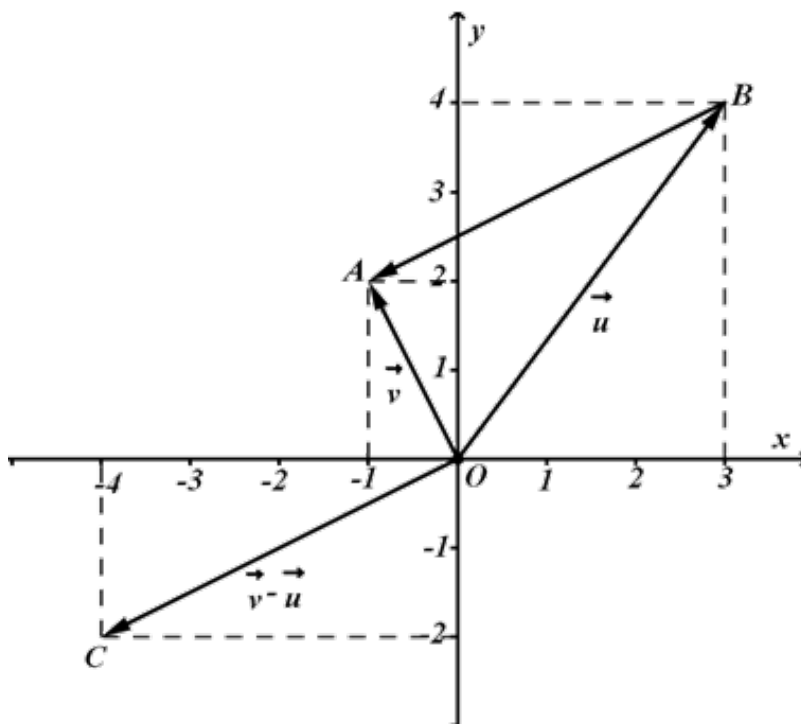
Solução:

Por definição

$$\vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u})$$

$$\vec{v} - \vec{u} = (-1, 2) + (-3, -4)$$

$$\vec{v} - \vec{u} = (-4, -2).$$



Os segmentos de reta BA e OC são equipolentes e qualquer um deles representa o vetor $\vec{v} - \vec{u}$.

Escolheremos OC para representar $\vec{v} - \vec{u}$.

Multiplicação por um número real

Dado um vetor $\vec{v} = (a_1, b_1)$ e um número real m , definimos a multiplicação do vetor $\vec{v}$ pelo número real m como segue:

$$m\vec{v} = (ma_1, mb_1)$$

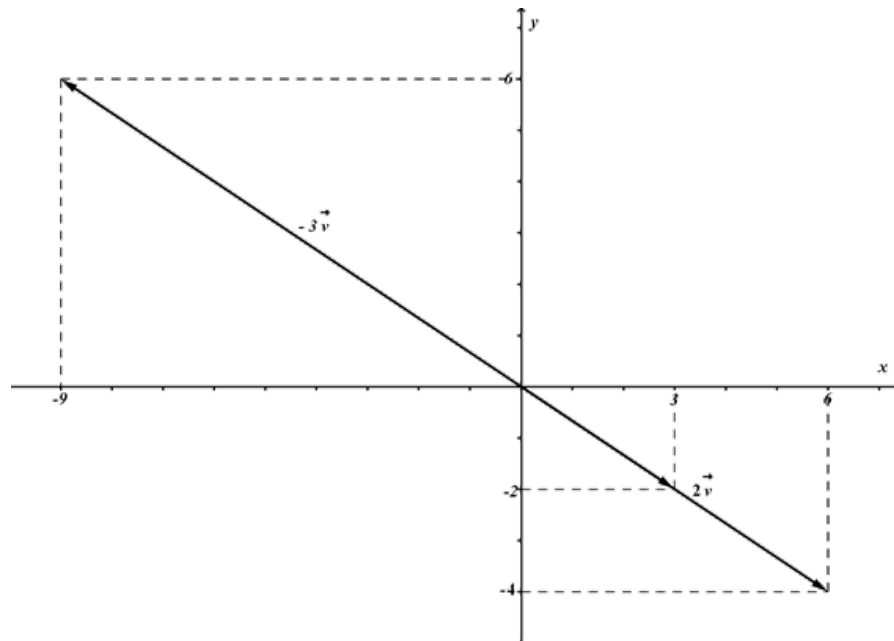
Exemplo 6

Considere o vetor $\vec{v} = (3, -2)$ determine e esboce os vetores $2\vec{v}$ e $-3\vec{v}$.

Solução:

$$2\vec{v} = (2 \cdot 3, 2 \cdot (-2)) = (6, -4) \text{ e}$$

$$-3\vec{v} = (-3 \cdot 3, -3 \cdot (-2)) = (-9, 6).$$



Note que os vetores $\vec{v}$ e $2\vec{v}$ são colineares assim como $\vec{v}$ e $-3\vec{v}$.

Propriedades da Adição

Sejam $\vec{v} = (a_1, b_1)$, $\vec{u} = (a_2, b_2)$ e $\vec{w} = (a_3, b_3)$ vetores quaisquer no plano:

1) Comutativa: $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$

Demonstração:

$$\vec{v} + \vec{u} = (a_1, b_1) + (a_2, b_2)$$

$$\vec{v} + \vec{u} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Como cada coordenada é um número real e sabemos que o conjunto dos números reais goza da propriedade comutativa podemos escrever:

$$\vec{v} + \vec{u} = (a_2 + a_1, b_2 + b_1)$$

$$\vec{v} + \vec{u} = (a_2, b_2) + (a_1, b_1)$$

$$\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}.$$

2) Associativa: $\vec{v} + (\vec{u} + \vec{w}) = (\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w}$

Demonstração:

$$\vec{v} + (\vec{u} + \vec{w}) = (a_1, b_1) + ((a_2, b_2) + (a_3, b_3)) = (a_1, b_1) + (a_2 + a_3, b_2 + b_3) =$$

$$= (a_1 + (a_2 + a_3), b_1 + (b_2 + b_3))$$

Como cada coordenada é um número real e sabemos que o conjunto dos números reais goza da propriedade associativa podemos escrever:

$$\vec{v} + (\vec{u} + \vec{w}) = (a_1 + (a_2 + a_3), b_1 + (b_2 + b_3)) = ((a_1 + a_2) + a_3, (b_1 + b_2) + b_3) =$$

$$= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) + (a_3, b_3) = ((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) + (a_3, b_3) = (\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w}.$$

3) Vetor Nulo: existe $\vec{0} = (0, 0)$ (vetor nulo), tal que $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$.

Faça a demonstração como atividade.

4) Elemento Oposto: Dado um vetor $\vec{v} = (a_1, b_1)$, existe um vetor que somado a $\vec{v}$ tem como resultado o vetor nulo, esse vetor é o oposto de $\vec{v}$ indicado por $-\vec{v} = (-a_1, -b_1)$:

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}.$$

Faça a demonstração como atividade.

Propriedades da Multiplicação por um número real

Sejam $\vec{v} = (a_1, b_1)$, $\vec{u} = (a_2, b_2)$ vetores quaisquer do plano e m e n números reais:

1) Distributiva em relação à soma de vetores: $m(\vec{v} + \vec{u}) = m\vec{v} + m\vec{u}$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} m(\vec{v} + \vec{u}) &= m(a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\ &= (m(a_1 + a_2), m(b_1 + b_2)) \\ &= (ma_1 + ma_2, mb_1 + mb_2) \\ &= (ma_1, mb_1) + (ma_2, mb_2) \\ &= m\vec{v} + m\vec{u}. \end{aligned}$$

2) Distributiva em relação à soma de escalares: $(m+n)\vec{v} = m\vec{v} + n\vec{v}$

Demonstração:

$$\begin{aligned} (m+n)\vec{v} &= ((m+n)a_1, (m+n)a_2) \\ &= (ma_1 + na_1, ma_2 + na_2) \\ &= m(a_1, a_2) + n(a_1, a_2) \\ &= m\vec{v} + n\vec{v} \end{aligned}$$

3) $m(n\vec{v}) = (mn)\vec{v}$

Faça a demonstração como atividade.

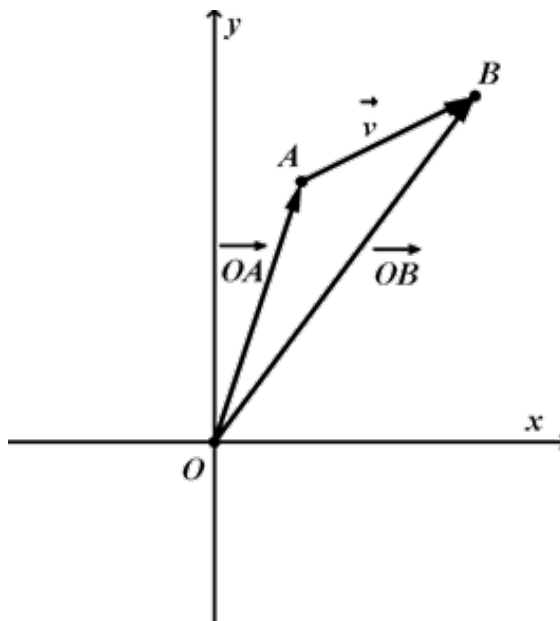
4) $1\vec{v} = \vec{v}$

Faça a demonstração como atividade.

Componentes de um vetor determinado por dois pontos

Sejam $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ pontos do plano. O segmento orientado AB determina um vetor $\vec{v}$ cujas coordenadas são $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Observando a figura a seguir,



a definição de adição de vetores nos permite escrever:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}, \text{ e disso}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1), \text{ ou seja,}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Exemplo 7

Dados os pontos $A(2,3)$ e $B(4,1)$ encontre as coordenadas do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e faça um esboço:

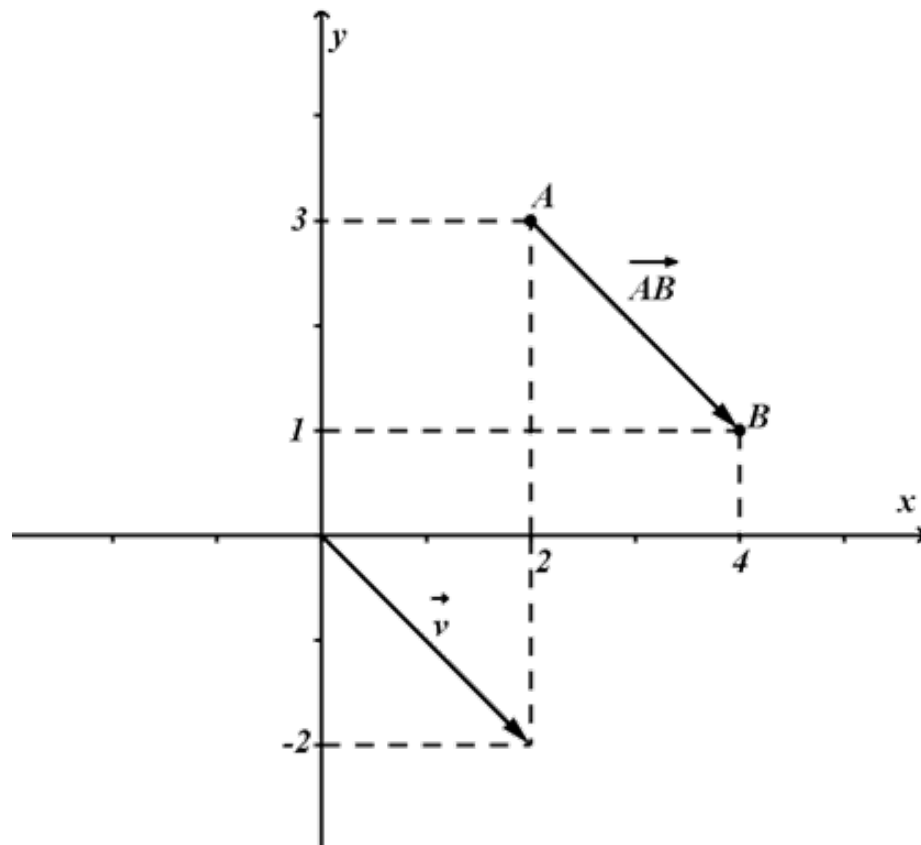
Solução:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{v} = B - A$$

$$\vec{v} = (4-2, 1-3)$$

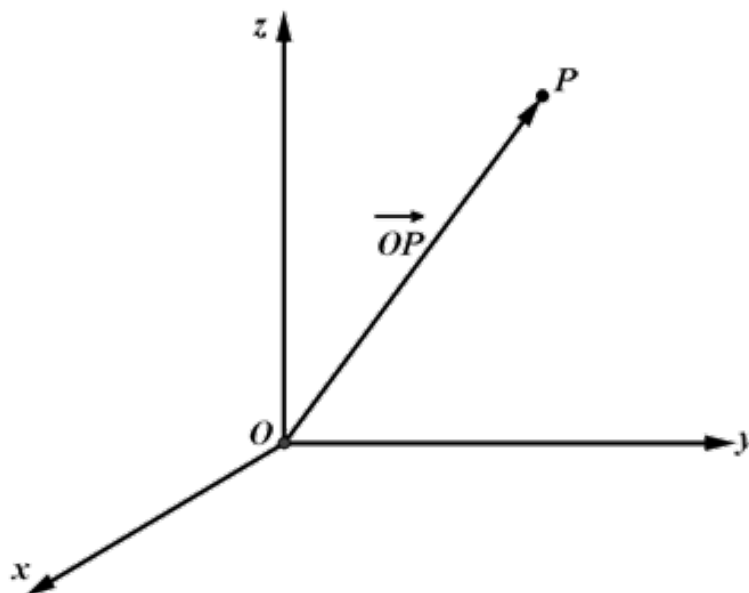
$$\vec{v} = (2, -2)$$



Vetores no Espaço

Cada terna ordenada de números reais (x,y,z) está em correspondência com um ponto P do espaço. À terna (x,y,z) podemos fazer corresponder um vetor no espaço com origem em O e extremidade em P : $(\vec{OP})$.

Veja a figura a seguir:



Isso nos permite definir **vetor no espaço** como segue:

Um **vetor no espaço** é uma terna ordenada de números reais (x,y,z) e usaremos a notação $\vec{v}$ para indicar um vetor no espaço. Os números reais x,y e z são as componentes do vetor $\vec{v}$.

Operações

Sejam $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{u} = (a_2, b_2, c_2)$ vetores no espaço e m um número real.

Adição

$$\vec{v} + \vec{u} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$$

Multiplicação por um número real

$$m\vec{v} = (ma_1, mb_1, mc_1)$$

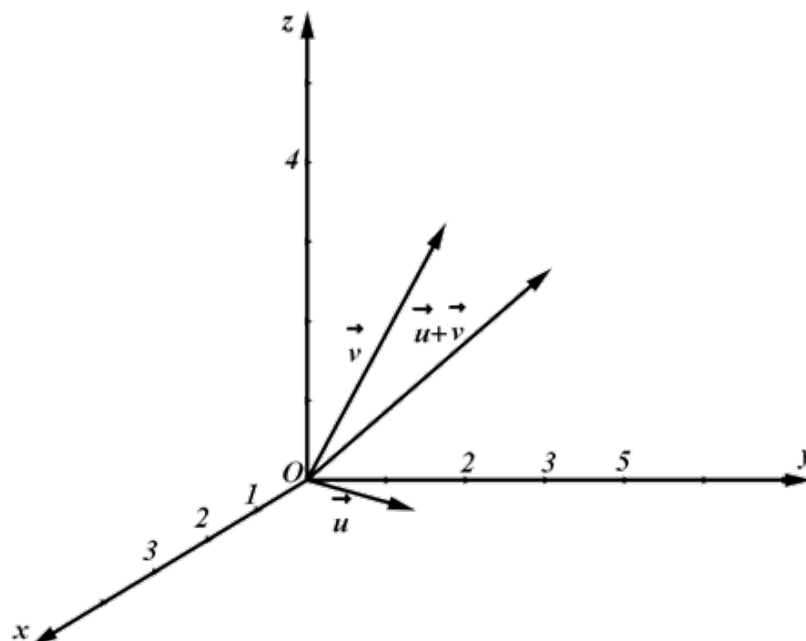
Exemplo 8

Dados os vetores $\vec{v} = (2, 3, 4)$ e $\vec{u} = (1, 2, 0)$ no espaço, pela definição temos que:

$$\vec{v} + \vec{u} = (2+1, 2+3, 4+0)$$

$$\vec{v} + \vec{u} = (3, 5, 4).$$

Veja a representação na figura a seguir:



Valem as propriedades:

Propriedades da Adição

1) Comutativa: $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$

2) Associativa: $(\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w})$.

3) Elemento neutro: $\vec{0}$

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}.$$

Lembre-se que o vetor nulo $\vec{0}$ é representado pelo segmento nulo cuja origem e extremidade coincidem.

4) Elemento Oposto: Dado um vetor $\vec{v}$, existe um vetor que somado a $\vec{v}$ tem como resultado o vetor nulo, esse vetor é o oposto de $\vec{v}$ indicado por $-\vec{v}$:

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}.$$

Diferença de Vetores

A propriedade do elemento oposto nos sugere definir a diferença de dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ da seguinte forma:

$$\vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u})$$

Isto é, a diferença $\vec{v} - \vec{u}$ é a soma dos vetores $\vec{v}$ e $-\vec{u}$ (oposto de $\vec{u}$).

Diferença de Vetores

A propriedade do elemento oposto nos sugere definir a diferença de dois vetores v e u da seguinte forma:

$$\vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u})$$

Isto é, a diferença $\vec{v} - \vec{u}$ é a soma dos vetores $\vec{v}$ e $-\vec{u}$ (oposto de $\vec{u}$).

Propriedades da Multiplicação por um número real

Se v e u são vetores quaisquer que m e n números reais.

1) Associativa: $m(n\vec{v}) = (mn)\vec{v}$.

2) Distributiva em relação à soma de números reais: $(m+n)\vec{v} = m\vec{v} + n\vec{v}$.

3) Distributiva em relação à soma de vetores: $m(\vec{v} + \vec{u}) = m\vec{v} + m\vec{u}$.

4) Identidade: $1\vec{v} = \vec{v}$.

Exemplo 9

Dado o vetor $\vec{v} = (1, -2, 5)$, pela definição temos que:

$$3\vec{v} = 3(1, -2, 5) = (3, -6, 15)$$

e

$$-4\vec{v} = -4(1, -2, 5) = (-4, 8, -20)$$

Atividade IV

Mostre que o ponto médio do segmento de extremos $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ é

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

Componentes de um vetor determinado por dois pontos

Sejam $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ pontos do espaço. O segmento orientado AB determina um vetor v cujas coordenadas são:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Dados os pontos $A = (-2, 1, 5)$ e $B = (2, -2, 3)$ no espaço, pela definição temos que:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \overrightarrow{AB} \\ &= B - A \\ &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \\ &= (2 - (-2), -2 - 1, 3 - 5) \\ &= (4, -3, -2)\end{aligned}$$

Atividade IV

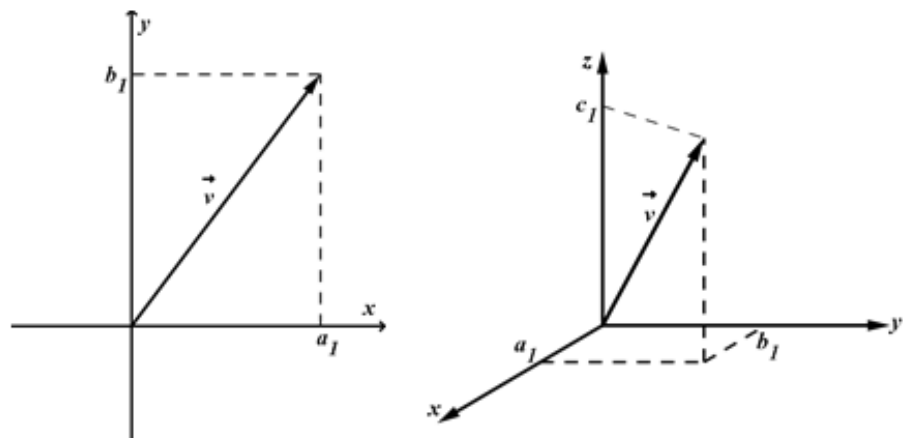
Verifique que os pontos $A(2, -1, 3)$, $B(6, 1, 0)$ e $C(-6, -5, 9)$ são colineares.

Observação:

Estamos usando a notação $\vec{v}$ para indicar vetores no plano ou no espaço.

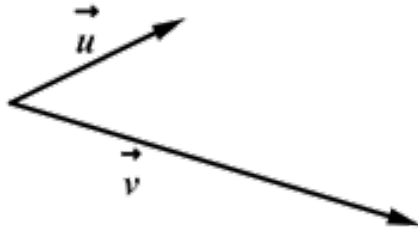
O que os diferem:

Em termos de coordenadas, o que difere um vetor no plano de um vetor no espaço é a quantidade de coordenadas, no plano $\vec{v} = (a, b)$ duas coordenadas. No espaço $\vec{v} = (a, b, c)$, três coordenadas.



Lista de Exercícios

- 1) Dados os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ represente graficamente os vetores $2\vec{v}$ e $-3\vec{u}$ e $2\vec{v} - 3\vec{u}$.



- 2) Se o ângulo entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ é $\pi/3$. Qual é o ângulo entre os vetores $3\vec{v}$ e $-3\vec{u}$.

- 3) Dados os vetores no espaço $\vec{v} = (2,4)$ e $\vec{u} = (-1,3)$, determine e esboce os vetores:

- a) $-\vec{v}$
- b) $3\vec{u} - \vec{v}$
- c) $\vec{v} - \vec{u}$
- d) $2\vec{u} + 3\vec{v}$

- 4) Dados os pontos $A(3,-2)$ e $B(-4,1)$.

- a) Determinar o vetor $\vec{AB}$.
- b) Determinar o ponto C tal que $\vec{AC} = 1/2 \vec{AB}$. (Note que C é o ponto médio do segmento $\vec{AB}$).

- 5) Dados os vetores $\vec{v} = (0,-3)$ e $\vec{u} = (2,4)$, determinar um vetor $\vec{w}$ tal que $2(\vec{v} + \vec{w}) - 3(\vec{u} - 2\vec{v}) - \vec{w} = 0$.

- 6) Dados os pontos $A(2,-1)$, $B(3,6)$ e $C(3,4)$ do plano determine os vetores:

- a) $\vec{AB}$
- b) $\vec{BC}$
- c) $\vec{AB} - \vec{BC}$
- d) $\vec{AC}$

- 7) Represente graficamente os pontos $O(0,0,0)$, $P(2,3,2)$, $Q(2,0,-4)$, $R(0,-3,0)$, $S(-1,-3,-4)$, $T(0,0,5)$, $U(-1,0,2)$ no sistema de coordenadas tridimensional.

- 8) Descreva e represente graficamente os seguintes conjuntos de pontos do espaço:

$$S_1 = \{(x,y,z) | z=0\} \quad S_2 = \{(x,y,z) | z=2\}$$

$$S_2 = \{(x,y,z) | x=z=0\}$$

$$S_3 = \{(x,y,z) | x=1 \text{ e } z=2\}.$$

- 9) Considere os vetores $\vec{v} = (3,1,-3)$ e $\vec{u} = (2,0,6)$. Determine o vetor $\vec{w}$ tal que $2\vec{w} - 3(\vec{v} + \vec{u}) = 3(\vec{w} - \vec{v}) + \vec{u}$.

- 10) Dados os pontos $A(3,-1,2)$ e $B(4,-2,5)$ determine o ponto P tal que $\vec{AP} = 2\vec{AB}$

- 11) Verifique se os pontos $A(5,1,-3)$, $B(7,2,-2)$ e $C(3,0,-4)$ são colineares.

Produto Escalar

O produto escalar dos vetores $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{u} = (a_2, b_2, c_2)$ é o número real

$$a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2$$

e será indicado por $\vec{v} \cdot \vec{u}$ e lê-se "v escalar u". Daí

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2, b_2, c_2) = a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2$$

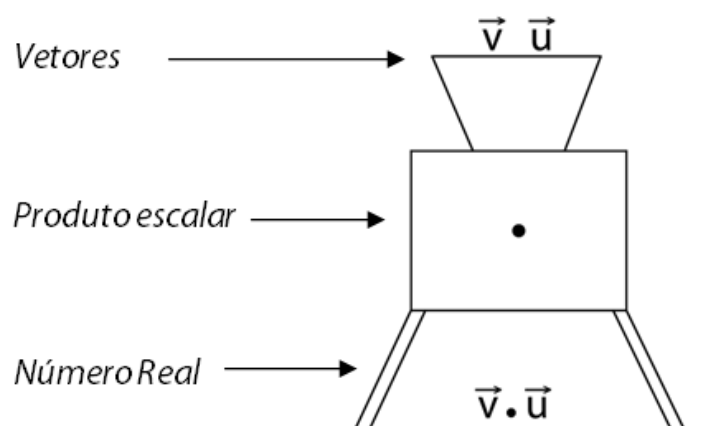
Solução:

Se $\vec{v} = (3, -1, 2)$ e $\vec{u} = (-2, -1, 4)$, temos:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 4 = 3$$

Exemplo 1

Você pode imaginar que o produto escalar é uma máquina que usa vetores como matéria prima e produz um número real:



PROPRIEDADES DO PRODUTO ESCALAR

Podemos verificar algumas propriedades do produto escalar. Sejam $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{u} = (a_2, b_2, c_2)$ e $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$ vetores quaisquer em $\mathbb{R}^3$.

1) $\vec{v} \cdot \vec{u} \geq 0$

Demonstração:

De fato, de acordo com a definição de produto escalar de vetores:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = (a_1, b_1, c_1) \cdot (a_1, b_1, c_1) = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$$

e sabemos que a "soma de quadrados" é número maior ou igual a zero, isto é:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \geq 0.$$

Você deve notar que $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 0$ somente se $a_1^2 = b_1^2 = c_1^2 = 0$, ou seja, somente se $\vec{v} = (0, 0, 0)$ (vetor nulo).

2) $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$ (o produto escalar é comutativo)

Demonstração:

Se $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{u} = (a_2, b_2, c_2)$, temos:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2, b_2, c_2)$$

$$= a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

o produto de números reais é comutativo podemos escrever:

$$\begin{aligned} a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 &= a_2 a_1 + b_2 b_1 + c_2 c_1 \\ &= (a_2, b_2, c_2) \cdot (a_1, b_1, c_1) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v}. \end{aligned}$$

O que você aprendeu agora, é que não importa a ordem dos vetores tomada para fazer o produto escalar o número real encontrado será o mesmo. Veja:

Exemplo 2

Dados os vetores $\vec{v} = (3, 1, -2)$ e $\vec{u} = (4, -3, 6)$:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 3 \cdot 4 + 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 6 = -3$$

e

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 + 6 \cdot (-2) = -3$$

3) $\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ (o produto escalar é distributivo em relação à adição de vetores).

Demonstração:

Calculando $\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{w})$:

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) &= (a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2 + a_3, b_2 + b_3, c_2 + c_3) \\ &= a_1(a_2 + a_3) + b_1(b_2 + b_3) + c_1(c_2 + c_3)\end{aligned}$$

e como a multiplicação de números reais é distributiva em relação à adição de números reais.

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = a_1 a_2 + a_1 a_3 + b_1 b_2 + b_1 b_3 + c_1 c_2 + c_1 c_3$$

organizando convenientemente:

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) &= (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) + (a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3) \\ &= \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{w}.\end{aligned}$$

Exemplo 3

Sejam $\vec{v} = (1, 2, -3)$, $\vec{u} = (2, -4, 5)$ e $\vec{w} = (1, 0, 2)$. Vamos ilustrar a propriedade 3: calculando $\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{w})$ e $\vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{w}$.

Solução:

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) &= (1, 2, -3) \cdot (1, -4, 7) \\ &= 1 - 8 - 21 = -28.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{w} &= (1, 2, -3) \cdot (2, -4, 5) + (1, 2, -3) \cdot (1, 0, 2) \\ &= (2 - 8 - 15) + (-1 + 0 - 6) \\ &= -21 - 7 = -28.\end{aligned}$$

$$4) (m\vec{v}) \cdot \vec{u} = m(\vec{v} \cdot \vec{u}) = \vec{u} \cdot (m\vec{v}).$$

Demonstração:

Vamos mostrar $(m\vec{v}) \cdot \vec{u} = m(\vec{v} \cdot \vec{u})$:

$$\begin{aligned}(m\vec{v}) \cdot \vec{u} &= (ma_1, mb_1, mc_1) \cdot (a_2, b_2, c_2) \\ &= (ma_1)a_2 + (mb_1)b_2 + (mc_1)c_2\end{aligned}$$

Como a multiplicação de números reais é associativa podemos escrever:

$$\begin{aligned}(m\vec{v}) \cdot \vec{u} &= m(a_1 a_2) + m(b_1 b_2) + m(c_1 c_2) \\ &= m(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) \\ &= m(\vec{v} \cdot \vec{u}).\end{aligned}$$

Atividade

Mostre $m(\vec{v} \cdot \vec{u}) = \vec{u} \cdot (m\vec{v})$.

MÓDULO DE UM VETOR

O módulo de um vetor $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)$ é o número real não negativo:

$$\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

e será representado por $|\vec{v}|$. Daí:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

Em termos das componentes do vetor $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)$ podemos escrever

$$|\vec{v}| = \sqrt{(a_1, b_1, c_1) \cdot (a_1, b_1, c_1)}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}.$$

Exemplo 4

Se $\vec{v} = (3, -2, 4)$, então

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 4 + 16} = \sqrt{29}.$$

Da definição do módulo de um vetor podemos verificar a seguinte propriedade:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$$

para isso basta notar que pela definição de módulo de um vetor:

$$\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = |\vec{v}|$$

e elevando ambos os membros da igualdade acima ao quadrado, obtemos:

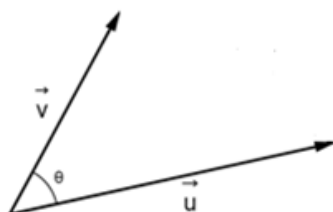
$$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2.$$

Atividade

- 1) Prove que $|\vec{v} + \vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 + 2 \cdot \vec{v} \cdot \vec{u} + |\vec{u}|^2$
- 2) Prove que $|\vec{v} - \vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 - 2 \cdot \vec{v} \cdot \vec{u} + |\vec{u}|^2$
- 3) Prove que $|\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 = (\vec{v} + \vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u})$.

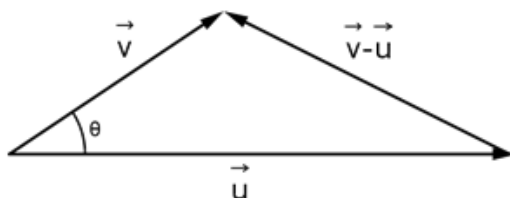
ÂNGULO ENTRE DOIS VETORES

O produto escalar entre dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ nos permite calcular o ângulo por eles formado. Sejam $\vec{v}$ e $\vec{u}$ vetores não nulos e θ o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{u}$:



Lembre-se que $0 \leq \theta \leq \pi$.

A diferença de vetores $\vec{v} - \vec{u}$ e o ângulo entre esses dois vetores se relacionam como sugerido na figura a seguir:



as medidas dos lados do triângulo da figura acima são $|\vec{v}|$, $|\vec{u}|$ e $|\vec{v} - \vec{u}|$.

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo, obtemos a seguinte relação:

$$|\vec{v} - \vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2 - 2|\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cos \theta$$

a atividade 1, desta aula, nos permite escrever:

$$|\vec{v}|^2 - 2 \cdot \vec{v} \cdot \vec{u} + |\vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2 - 2|\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cos \theta$$

e efetuando os cálculos:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cos \theta$$

o que nos dá uma relação entre o produto escalar de dois vetores e o ângulo por eles formado.

Calcular o ângulo entre s vetores $\vec{v} = (1, -1, -2)$ e $\vec{u} = (2, 1, -1)$.

Solução:

De acordo com a relação

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cos \theta$$

$$(1, -1, -2) \cdot (2, 1, -1) = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \cos \theta$$

efetuando os cálculos temos:

$$3 = \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot \cos \theta$$

e daí

$$\cos \theta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

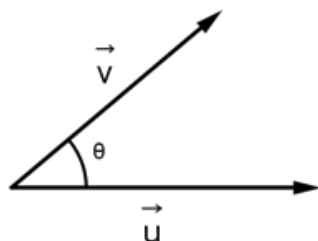
portanto

$$\theta = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ$$

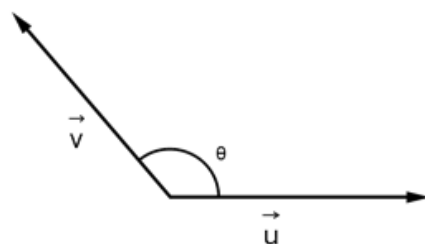
Observações:

Como $|\vec{v}| > 0$ e $|\vec{u}| > 0$. A igualdade $\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cos \theta$ nos permite observar que:

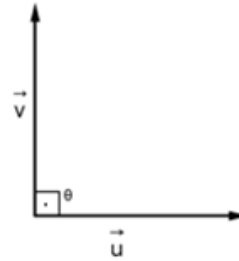
1) Se $\vec{v} \cdot \vec{u} > 0$, então $\cos \theta$ é um número positivo, o que implica $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$.



2) Se $\vec{v} \cdot \vec{u} < 0$, então $\cos \theta$ é um número negativo, o que implica $90^\circ < \theta < 180^\circ$.



3) Se $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$, então $\cos \theta$ é igual a zero, o que implica $\theta = 90^\circ$.



Neste caso, dizemos que os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ são ortogonais e denotamos por $\vec{v} \perp \vec{u}$. Podemos enunciar o seguinte resultado:

CONDIÇÃO DE ORTOGONALIDADE

Dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ são ortogonais se, e somente se, o produto escalar deles é nulo, isto é, $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$.

Exemplo 6

Os vetores $\vec{v} = (1, -2, 3)$ e $\vec{u} = (7, 5, 1)$ são ortogonais.

Solução:

Basta verificar que o produto escalar de $\vec{v}$ e $\vec{u}$ é nulo:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (1, -2, 3) \cdot (7, 5, 1) = 7 - 10 + 3 = 0.$$

Exemplo 7

Dados os vetores $\vec{v} = (2, -3, 4)$ e $\vec{u} = (-1, m, 2)$ determinar m para que os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ sejam ortogonais.

Solução:

Pela condição de ortogonalidade de dois vetores queremos que

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 0.$$

Então,

$$(2, -3, 4) \cdot (-1, m, 2) = 0$$

$$-2 - 3m + 8 = 0$$

$$3m = 6$$

$$m = 2.$$

Atividade

Faça uma pesquisa sobre a **projeção** de um vetor sobre outro.

Lista de Exercícios

- Dados os vetores $\vec{v} = (3, 0, 1)$, $\vec{u} = (4, -1, 3)$ e $\vec{w} = (2, 2, -2)$, calcular:
 - $\vec{v} \cdot \vec{u}$ (v escalar u)
 - $\vec{u} \cdot \vec{w}$ (u escalar w)
 - $\vec{v} \cdot \vec{v}$ (v escalar v)
 - $|\vec{v}|$
 - $\vec{v} + \vec{u}$
- Dados $\vec{v} = (2, -3, x)$ e $\vec{u} = (5, -3, 2)$. Qual o valor de x para que v escalar u seja igual 4?
- O ângulo entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ é $\frac{2}{3}\pi$, sabendo-se que $|\vec{v}| = 3$ e $|\vec{u}| = 4$.
Calcular:
 - $\vec{v} \cdot \vec{v}$
 - $\vec{u} \cdot \vec{u}$
 - $\vec{v} \cdot \vec{u}$
 - $(\vec{v} + \vec{u}) \cdot (\vec{v} + \vec{u})$
- Dados os vetores unitários $\vec{v}$, $\vec{u}$ e $\vec{w}$ e sabendo que $\vec{v} + \vec{u} + \vec{w} = \vec{0}$, calcular:
 $\vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{v}$.
- Qual o valor de x para que o vetor $\vec{v} = (2, -1, x - 3)$ seja ortogonal ao vetor $\vec{u} = (3, -2, 4)$?
- O ângulo entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ é $\frac{\pi}{6}$, calcular o ângulo entre os vetores $\vec{v} + \vec{u}$ e $\vec{v} - \vec{u}$, sabendo-se que $|\vec{v}| = \sqrt{3}$ e $|\vec{u}| = 1$.
- Sejam $\vec{v}$ e $\vec{u}$ vetores distintos. Mostre que, se $\vec{v} + \vec{u}$ é perpendicular a $\vec{v} - \vec{u}$, então $|\vec{v}| = |\vec{u}|$.
- Dado um triângulo de vértices $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$ e $C(3, -2, -1)$, determinar o ângulo interno do vértice B . Esse triângulo é isósceles?

Produto Vetorial

Dados os vetores $v = (a_1, b_1, c_1)$ e $u = (a_2, b_2, c_2)$ o produto vetorial de $\vec{v}$ por $\vec{u}$ é o vetor $\vec{w} = (b_1 c_2 - c_1 b_2, a_2 c_1 - a_1 c_2, a_1 b_2 - a_2 b_1)$. O vetor $\vec{w}$ é indicado por $\vec{v} \times \vec{u}$ e se lê "produto vetorial de $\vec{v}$ por $\vec{u}$ ".

Podemos escrever o vetor $v \times u$ como segue:

$$\vec{v} \times \vec{u} = (b_1 c_2 - b_2 c_1) \vec{i} + (a_2 c_1 - a_1 c_2) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}$$

e podemos expressá-lo na forma de um determinante:

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Então, uma forma de memorizar a fórmula do produto vetorial $v \times u$ é calcular o determinante

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

como se fosse um determinante sobre o conjunto dos números reais.

Exemplo 1

Sejam $\vec{v} = (3, 2, -1)$ e $\vec{u} = (-1, 3, 4)$ vetores, calcule $\vec{v} \times \vec{u}$:

Solução:

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = 8\vec{i} + \vec{j} + 9\vec{k} + 2\vec{k} + 3\vec{i} - 12\vec{j}$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = 11\vec{i} - 11\vec{j} + 11\vec{k}.$$

Propriedades do Produto Vetorial

Estudaremos algumas propriedades do produto vetorial.

Sejam $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{u} = (a_2, b_2, c_2)$ vetores e m um número real.

1) $\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$, qualquer que seja o vetor $\vec{v}$. (O produto vetorial de um vetor por ele mesmo sempre é igual ao vetor nulo)

Demonstração:

Se $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)$, então pela definição do produto vetorial

$$\vec{v} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v} \times \vec{v} = (b_1 c_1 - b_1 c_1) \vec{i} + (a_1 c_1 - a_1 c_1) \vec{j} + (a_1 b_1 - a_1 b_1) \vec{k}$$

$$\vec{v} \times \vec{v} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = (0,0,0).$$

$$2) \vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v}$$

Demonstração:

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = (b_1 c_2 - b_2 c_1) \vec{i} + (a_2 c_1 - a_1 c_2) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}$$

e

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (b_2 c_1 - b_1 c_2) \vec{i} + (a_2 c_1 - a_1 c_2) \vec{j} + (a_2 b_1 - a_1 b_2) \vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = -(b_1 c_2 - b_2 c_1) \vec{i} + (a_2 c_1 - a_1 c_2) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}.$$

$$3) \vec{v} \times (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v} \times \vec{u} + \vec{v} \times \vec{w}$$

Tente demonstrar!

Atividade I

$$4) (m\vec{v}) \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ma_1 & mb_1 & mc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Demonstração:

$$(m\vec{v}) \times \vec{u} = (mb_1 c_2 - mb_2 c_1) \vec{i} + (ma_2 c_1 - ma_1 c_2) \vec{j} + (ma_1 b_2 - ma_2 b_1) \vec{k}$$

e colocando o m em evidência:

$$(m\vec{v}) \times \vec{u} = m[(b_1c_2 - b_2c_1)\vec{i} + (a_2c_1 - a_1c_2)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}]$$

$$(m\vec{v}) \times \vec{u} = m(\vec{v} \times \vec{u}).$$

5) Se $\vec{v}$ e $\vec{u}$ são colineares, então $\vec{v} \times \vec{u} = \vec{0}$.

Demonstração:

Os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ são colineares se existe um número real m tal que

$$\vec{u} = m\vec{v}$$

disso:

$$\vec{u} = (ma_1, mb_1, mc_1)$$

logo:

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ ma_1 & mb_1 & mc_1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

6) $\vec{v} \times \vec{u}$ é ortogonal simultaneamente aos vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$.

Demonstração:

Pela condição de ortogonalidade, visto na de Produto Escalar, devemos mostrar que $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) = 0$ (garante que $\vec{v} \times \vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$) e $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) = 0$ (garante que $\vec{v} \times \vec{u}$ é ortogonal a $\vec{u}$).

Sabendo que

$$\vec{v} \times \vec{u} = (b_1c_2 - b_2c_1)\vec{i} + (a_2c_1 - a_1c_2)\vec{j} + (a_1b_2 + a_2b_1)\vec{k}$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = (b_1c_2 - b_2c_1, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 + a_2b_1)$$

fazemos

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) = a_1(b_1c_2 - b_2c_1) + b_1(a_2c_1 - a_1c_2) + c_1(a_1b_2 + a_2b_1)$$

e efetuando as contas obtemos

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) = 0$$

Agora, faça $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{u})$, é análogo!

Exemplo 2

Vamos ilustrar a propriedade 6 com um exemplo. Se $\vec{v} = (1, -2, 4)$ e $\vec{u} = (2, 3, -3)$ temos:

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 11\vec{j} + 7\vec{k}$$

Esse vetor é ortogonal simultaneamente aos vetores $\vec{v} = (1, -2, 4)$ e $\vec{u} = (2, 3, -3)$. Vamos mostrar que $\vec{v} \times \vec{u}$ é ortogonal ao vetor $\vec{v}$:

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) = (1, -2, 4) \cdot (-6, 11, 7) = -6 - 22 + 28 = 0.$$

A propriedade seguinte relaciona o produto escalar com o módulo do produto vetorial.

Atividade II

Mostre que:

$$|\vec{v} \times \vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 |\vec{u}|^2 - (\vec{v} \cdot \vec{u})^2$$

A propriedade a seguir nos dará a oportunidade de estudar uma aplicação do módulo do produto vetorial.

7) Se $\vec{v}$ e $\vec{u}$ são vetores não nulos e θ é o ângulo entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$, então

$$|\vec{v} \times \vec{u}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \sin \theta$$

Demonstração:

A atividade **anterior** garante

$$|\vec{v} \times \vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 |\vec{u}|^2 - (\vec{v} \cdot \vec{u})^2$$

e sabemos da sobre o Produto escalar que $\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cos \theta$, então:

$$|\vec{v} \times \vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 |\vec{u}|^2 - (|\vec{v}| |\vec{u}| \cos \theta)^2$$

$$|\vec{v} \times \vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 |\vec{u}|^2 \cos^2 \theta$$

$$|\vec{v} \times \vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 |\vec{u}|^2 (1 - \cos^2 \theta)$$

$$|\vec{v} \times \vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 |\vec{u}|^2 \sin^2 \theta$$

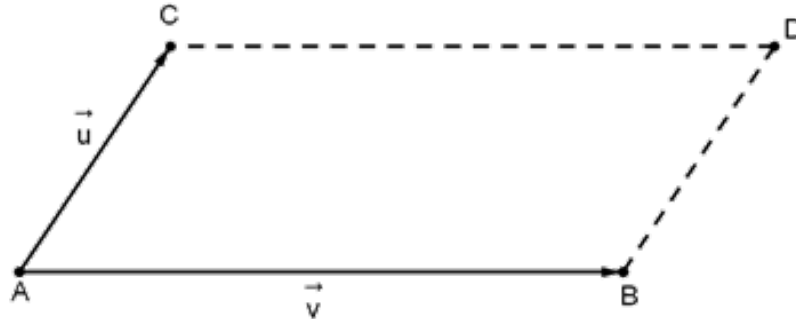
Daí, retirando a raiz quadrada em ambos os lados:

$$|\vec{v} \times \vec{u}| = |\vec{v}| |\vec{u}| \sin \theta$$

Note que: $\sqrt{\sin^2 \theta} = \sin \theta$. **POR QUÊ?**

Aplicação do Módulo do Produto Vetorial

Sejam $\vec{v}$ e $\vec{u}$ vetores não nulos. Se escrevermos $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ é fácil notar que esses vetores determinam um paralelogramo $ABDC$, veja a figura a seguir:



Vamos mostrar que o módulo do produto vetorial dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ é igual a área do paralelogramo $ABDC$.

Na anterior, observamos que a medida da base do paralelogramo $ABDC$ é o módulo do vetor $\vec{v}$ indicado por $|\vec{v}|$. Também se θ é o ângulo entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$, veja a figura a seguir, a altura do paralelogramo $ABDC$ é $h = |\vec{u}| \sin \theta$. Então, indicando a área do paralelogramo por A_p segue que:

$$A_p = (\text{base}) \cdot (\text{altura})$$

$$A_p = |\vec{v}| |\vec{u}| \sin \theta$$

A propriedade 7 do produto vetorial é a identidade

$$|\vec{v} \times \vec{u}| = |\vec{v}| |\vec{u}| \sin \theta$$

Disso,

$$A_p = |\vec{v} \times \vec{u}|$$

Exemplo 3

Dados os vetores $\vec{v} = (0, 5, 0)$ e $\vec{u} = (0, 0, 4)$. Calcule a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$.

O paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ tem base $|\vec{v}| = 5$ e altura 4. Logo a sua área é $A_p = 4 \cdot 5 = 20$. Vamos agora usar o módulo do produto vetorial $\vec{v} \times \vec{u}$ para calcular a sua área

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 20\vec{i}$$

e

$$|\vec{v} \times \vec{u}| = \sqrt{20^2} = 20$$

O exemplo anterior ilustra uma situação favorável ao cálculo da área do paralelogramo usando as dimensões da base e a altura. Mas nem sempre a posição dos vetores no espaço que determinam o paralelogramo é favorável ao cálculo da área dessa forma. Veja o seguinte exemplo:

Exemplo 4

Calcular a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{v} = (1, 2, 3)$ e $\vec{u} = (3, -3, 2)$.

Solução:

Sabemos que:

$$A_p = |\vec{v} \times \vec{u}|$$

Vamos calcular o produto vetorial primeiramente:

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 13\vec{i} + 7\vec{j} - 9\vec{k}$$

Daí,

$$A_p = |\vec{v} \times \vec{u}|$$

$$A_p = \sqrt{13^2 + 7^2 + (-9)^2}$$

$$A_p = \sqrt{169 + 49 + 81}$$

$$A_p = \sqrt{299}$$

Produto Misto

Já aprendemos que para vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$ no espaço, o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{w}$ ainda é um vetor no espaço. E também, já sabemos que o produto escalar de dois vetores é um número real. Agora, faremos o produto escalar de um vetor $\vec{v}$ por $\vec{u} \times \vec{w}$, obtendo-se um número real

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w})$$

que será representado por $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ e é denominado o **PRODUTO MISTO** dos vetores $\vec{v}$, $\vec{u}$ e $\vec{w}$ tomados nesta ordem:

$$(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w})$$

Sejam $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{u} = (a_2, b_2, c_2)$ e $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$ temos:

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

que pode ser escrito na forma de componentes

$$\vec{u} \times \vec{w} = \left(\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right)$$

E calculando o produto escalar dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{w}$ temos:

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

mas o membro direito da igualdade acima é o desenvolvimento do seguinte determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \text{Verifique!}$$

Disso, uma forma de se calcular o produto misto $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w})$ é calculando o determinante acima, isto é:

$$(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Propriedades do Produto Misto

Uma propriedade muito importante do produto misto é a seguinte:

1) $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = 0$ se um dos vetores é nulo, se dois deles são colineares, ou se os três são coplanares.

i) Suponha, que $\vec{v} = (0, 0, 0)$. Então:

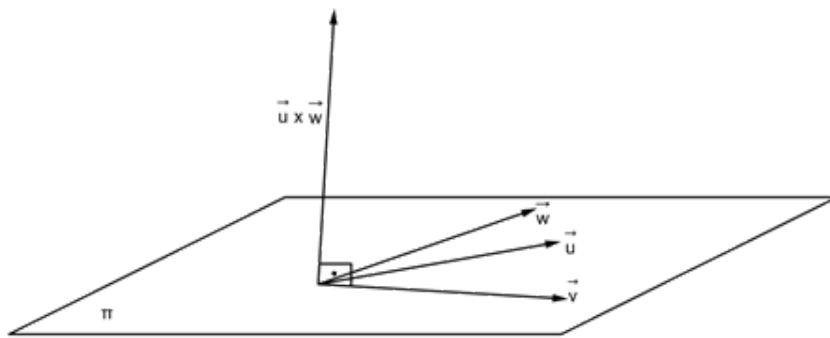
$$(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

ii) Suponha que $\vec{v}$ e $\vec{u}$ são não nulos e $\vec{v} = m \cdot \vec{u}$. Então:

$$(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} ma_2 & mb_2 & mc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = m \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = m \cdot 0 = 0$$

iii) Se $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ são coplanares, isto é, pertencentes ao mesmo plano, como o vetor $\vec{u} \times \vec{w}$ é ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$, então $\vec{u} \times \vec{w}$ será também ortogonal ao vetor $\vec{v}$. Veja a figura a seguir. Disso e da condição de ortogonalidade:

$$(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) = 0$$



Exemplo 5

Os vetores $\vec{v} = (3, 1, -2)$, $\vec{u} = (2, 0, 4)$ e $\vec{w} = (3, -1, 5)$ não são coplanares.

Solução:

$$\text{Como } (\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$$

Logo, de acordo com a propriedade acima, $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ não são coplanares.

Exemplo 6

Qual deve ser o valor de a para que os vetores $\vec{v} = (1, a, -2)$, $\vec{u} = (3, 0, -4)$ e $\vec{w} = (-2, 1, 3)$ sejam coplanares?

Solução:

Para que $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ sejam coplanares devemos impor que $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -2 \\ 3 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$8a - 6 + 4 - 9a = 0$$

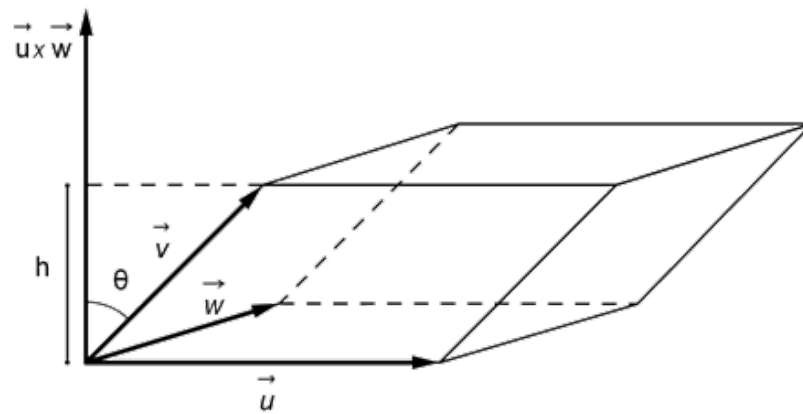
$$-a = 2$$

$$a = -2.$$

Aplicação do Módulo do Produto Misto

Uma aplicação interessante do módulo do produto misto é o cálculo do volume de um paralelepípedo.

Três vetores não nulos $\vec{v}, \vec{u}$ e $\vec{w}$ determinam um paralelepípedo. Escrevendo $\vec{v} = \vec{AD}$, $\vec{u} = \vec{AB}$ e $\vec{w} = \vec{AC}$. Observe a figura:



Indicando por V_p o volume de um paralelepípedo já sabemos que:

$$V_p = (\text{área da base}) \cdot (\text{altura})$$

Mas observe que a base de um paralelepípedo é o paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$, e vimos que a área desse paralelogramo é igual ao módulo do produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{w}$:

$$A_p = |\vec{u} \times \vec{w}|.$$

Seja θ o ângulo entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{w}$. Como o vetor $\vec{u} \times \vec{w}$ é perpendicular a base, a altura h do paralelepípedo é $h = |\vec{v}| |\cos\theta|$.

Então:

$$V_p = |\vec{u} \times \vec{w}| |\vec{v}| |\cos\theta|.$$

Podemos escrever

$$V_p = |\vec{v}| |\vec{u} \times \vec{w}| |\cos\theta|$$

mas como

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) = |\vec{v}| |\vec{u} \times \vec{w}| \cos\theta$$

temos que

$$|\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w})| = |\vec{v}| |\vec{u} \times \vec{w}| |\cos\theta|$$

Disso

$$V_p = |\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w})| = |(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})|$$

Exemplo 7

Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores

$$\vec{v} = (2, 1, 1),$$

$$\vec{u} = (2, -2, 3) \text{ e } \vec{w} = (0, 1, 3).$$

Solução:

Como

$$(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 2 - 6 - 6 = -22$$

o volume do paralelepípedo é

$$V_p = |\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w})| = |(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})| = |-22| = 22.$$

Lista de Exercícios

1) Dados os vetores $\vec{v} = (3, 0, 1)$, $\vec{u} = (4, -1, 3)$ e $\vec{w} = (2, 2, -2)$, calcular:

a) $\vec{v} \times \vec{u}$ (*v vetorial u*)

b) $\vec{u} \times \vec{w}$ (*u vetorial w*)

c) $\vec{w} \times \vec{u}$ (*w vetorial u*)

d) $\vec{v} \times \vec{v}$ (*v vetorial v*)

2) Os vetores $\vec{v}$, $\vec{u}$ e $\vec{w}$ verificam a condição $\vec{v} + \vec{u} + \vec{w} = \vec{0}$. Demonstre que $\vec{v} \times \vec{u} = \vec{u} \times \vec{w} = \vec{w} \times \vec{v}$.

3) Encontrar um vetor simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{v} = (3, 2, 4)$ e $\vec{u} = (2, -1, -2)$.

4) Calcular a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{v} = (3, 2, 1)$ e $\vec{u} = (2, -1, 1)$

5) Dados os vértices $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, -3)$ e $C(5, 2, 6)$. Calcular a área do triângulo ABC .

6) Dados os vértices $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$ e $C(1, 3, -1)$ de um triângulo, calcular o comprimento da altura traçada do vértice B sobre o lado AC .

7) Sabendo que $|\vec{v}| = 2$, $|\vec{u}| = 5$ e que o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{u}$ é de 45° , calcular a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$.

8) Determinar o valor de m para que o vetor $\vec{w} = (1, 2, m)$ seja ortogonal simultaneamente aos vetores $\vec{v} = (2, -1, 0)$ e $\vec{u} = (1, -3, -1)$.

9) Dados os vetores $\vec{v} = (3, 0, 1)$, $\vec{u} = (4, -1, 3)$ e $\vec{w} = (2, 2, -2)$, calcular:

a) $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$

b) $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{u})$

c) $(\vec{v}, \vec{v}, \vec{u})$

d) $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{0})$

10) Os vetores $\vec{v} = (3, -2, 1)$, $\vec{u} = (2, 1, 2)$ e $\vec{w} = (3, -1, -2)$ são coplanares? Justifique.

11) Determinar x para que os vetores $\vec{v} = (2, 3, -1)$, $\vec{u} = (1, -1, 3)$ e $\vec{w} = (1, 9, x)$ sejam coplanares.

12) Os quatro pontos $A(1, 2, -2)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$ e $D(2, 1, 3)$ se encontram em um mesmo plano?

Retas

Equações da Reta no Espaço

Agora que você já estudou vetores no espaço vamos associá-los à equações de retas no espaço. Nós dizemos que um vetor é paralelo a uma reta quando a reta que o contém é paralela a essa reta. Observe a figura 1:

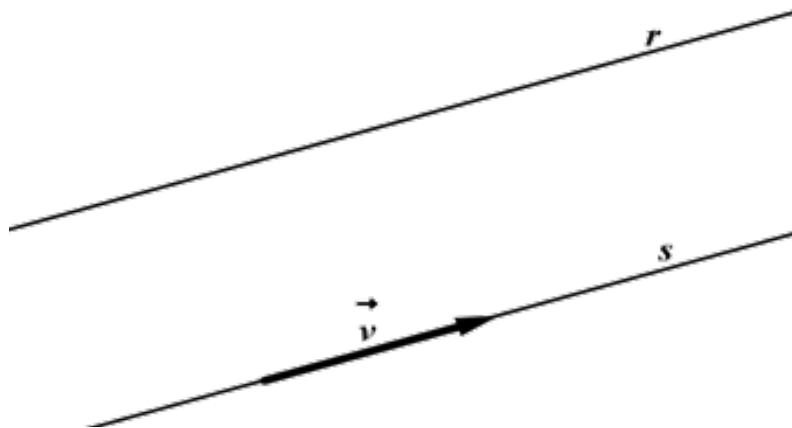


Figura 1. Vetor v paralelo à reta r .

Uma reta no espaço coordenado está determinada por dois pontos distintos P e Q desta reta. Tomemos o vetor $\vec{PQ}$ com origem na origem O do sistema de coordenadas e paralelo ao vetor $\vec{PQ}$ contido na reta. Observemos que o vetor $\vec{v}$ é paralelo à reta, dessa forma associamos à reta uma direção dada pelo vetor $\vec{v}$. E Também a essa reta associamos um ponto P sobre ela.

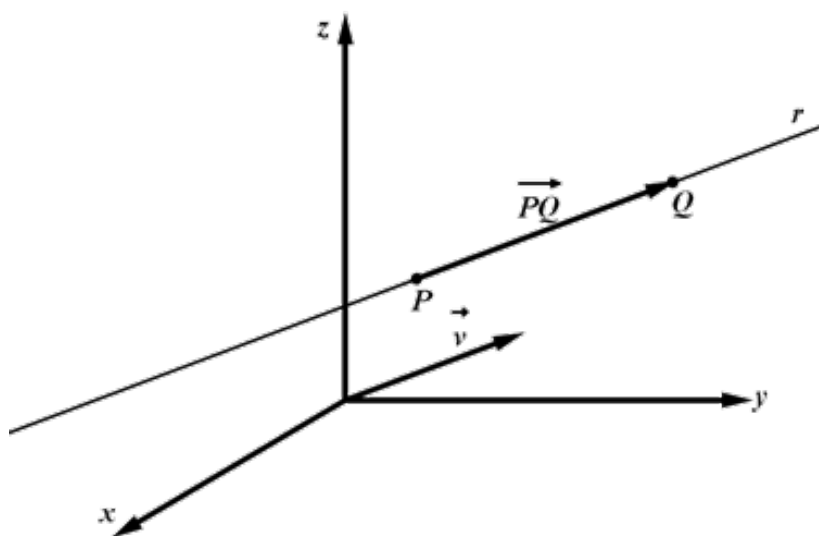


Figura 2

Agora, fixado um vetor não nulo $\vec{v}$ e um ponto R fora da reta que contém $\vec{v}$, existe uma única reta passando por R que é paralela ao vetor $\vec{v}$.

Dessa forma, uma reta fica determinada por um ponto sobre ela e um vetor paralelo a ela e reciprocamente, um vetor não nulo ($\vec{v} \neq \vec{0}$) e um ponto fora da reta que contém o vetor determina uma única reta.

Vamos deduzir uma equação analítica para uma reta no espaço utilizando a notação de vetores.

Tomemos um ponto P sobre a reta e um vetor não nulo $\vec{v}$ paralelo à reta. Um outro ponto Q no espaço pertence a essa reta, então os vetores $\overrightarrow{PQ}$ e $\vec{v}$ são paralelos, e pela condição de paralelismo de dois vetores, já estudada, existe um número real t tal que:

$$\overrightarrow{PQ} = t\vec{v}, t \in \mathbb{R}$$

A equação deduzida acima é denominada EQUAÇÃO VETORIAL DA RETA.

O vetor $\vec{v}$ paralelo à reta é denominado vetor diretor da reta

Observe que a cada valor real atribuído a t obtemos um ponto da reta, e quando t varia de menos infinito $(-\infty)$ a mais infinito $(+\infty)$ descrevemos todos os pontos da reta.

Exemplo 1

Encontrar a equação vetorial da reta r que passa pelo ponto $P(1,2,0)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (2,3,3)$.

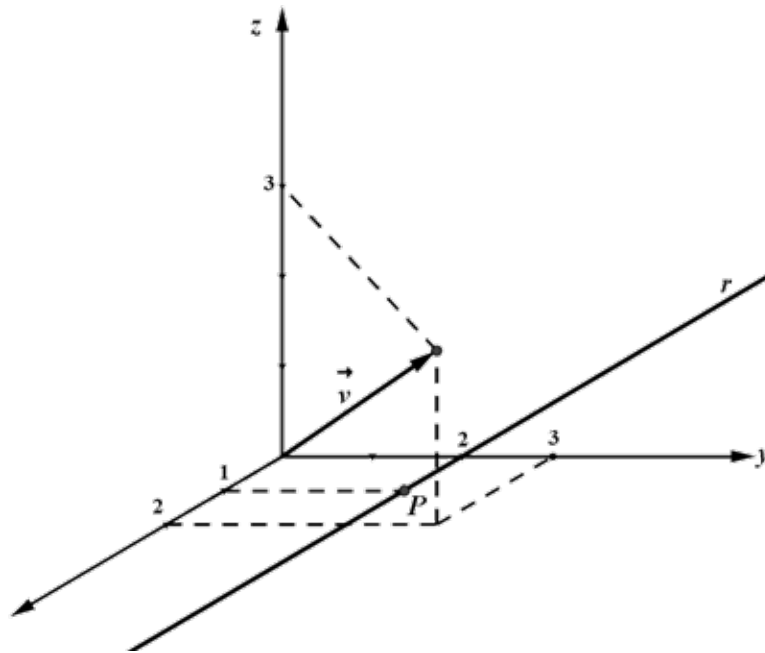
Solução:

Lembre-se que:

$\overrightarrow{PQ} = Q - P$ em termos de coordenadas, se $Q(x, y, z)$, temos:

$$\overrightarrow{PQ} = (x, y, z) - (1, 2, 0) = (x - 1, y - 2, z)$$

e a equação vetorial da reta $\overrightarrow{PQ} = t\vec{v}, t \in \mathbb{R}$ fica $(x - 1, y - 2, z) = t(2, 3, 3)$,
 $t \in \mathbb{R}$



a) Fazendo $t=0$ na equação vetorial encontrada, $(x-1, y-2, z)=(0,0,0)$, obtemos $x=1$, $y=2$ e $z=0$, ou seja, obtemos o ponto P da reta r.

b) Ao atribuir um valor real a t obtemos um ponto da reta r. Por exemplo, para $t=3$:

$$(x-1, y-2, z)=3(2, 3, 3),$$

ou seja,

$$(x-1, y-2, z)=t(6, 9, 9)$$

e daí

$$x=7, y=11 \text{ e } z=9$$

Obtemos o ponto Q(7, 11, 9) sobre a reta r.

c) Por outro lado, dado um ponto R (x_0, y_0, z_0) no espaço podemos determinar se ele pertence ou não à reta r. Por exemplo, o ponto R (4, 1, 3) pertence à reta r?

Temos que verificar se existe ou não um número real t tal que:

$$(4-1, 1-2, 3) = t(1, 3, 3), \text{ que é o mesmo que}$$

$$(3, 1, 3) = (t, 3t, 3t), \text{ isto é}$$

$$\begin{cases} 3 = t \\ -1 = 3t \\ 3 = 3t \end{cases}$$

Como para satisfazer as três equações anteriores t não assume um único valor, então o ponto R (4, 1, 3) não pertence à reta r.

Agora, vamos estabelecer mais um tipo de equações para a reta. Lembre-se que a equação vetorial da reta é: $\vec{PQ} = t\vec{v}$,

onde P é um ponto sobre a reta e $\vec{v}$ é um vetor paralelo à reta. Em termos de coordenadas, fazendo P (x_0, y_0, z_0) , Q (x, y, z) e $\vec{v}=(a, b, c)$ podemos fazer:

$$\overrightarrow{PQ} = t\vec{v}, t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow Q - P = tv, t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = t(a, b, c), t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (at, bt, ct), t \in \mathbb{R}$$

dessa última igualdade temos:

$$x - x_0 = at, \quad y - y_0 = bt, \quad z - z_0 = ct, t \in \mathbb{R}$$

e podemos escrever:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

que são as equações paramétricas da reta.

Nota: t é denominado parâmetro da reta

Exemplo 2

Encontre as equações paramétricas da reta que contém os pontos $P(1, 3, 2)$ e $Q(-2, 3, 5)$.

Solução:

Um vetor diretor da reta é $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (-3, 0, 3)$ um ponto sobre a reta é $P(1, 3, 2)$. Substituindo nas equações:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

encontramos:

$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 3 \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

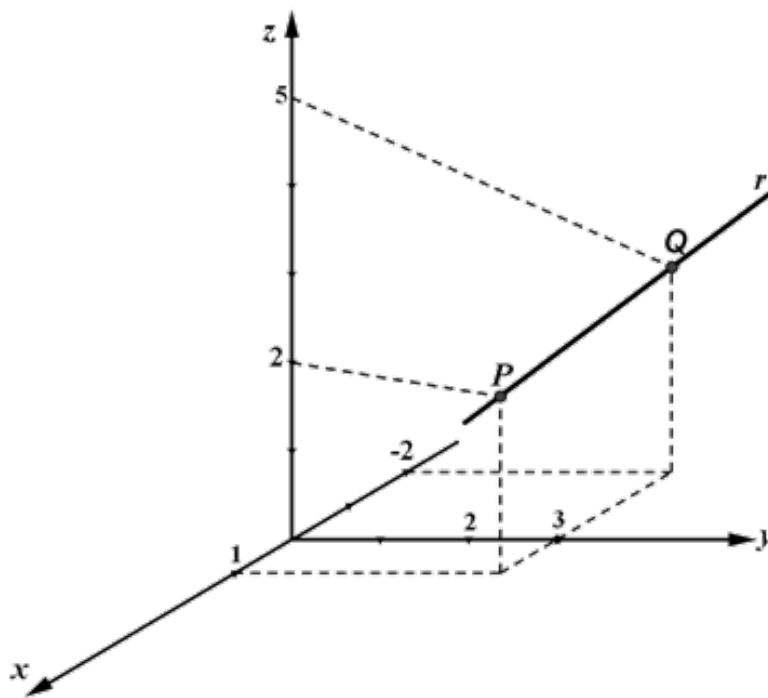


Figura 4.

Nesse exemplo, poderíamos ter escolhido o ponto $Q(-2,3,5)$ sobre a reta e as equações paramétricas seriam:

$$\begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 3 \\ z = 5 + 3t \end{cases}$$

Um pouco mais...

A reta do exemplo 2 com equações paramétrica é paralela ao plano coordenado xz. Por quê?

$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 3 \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

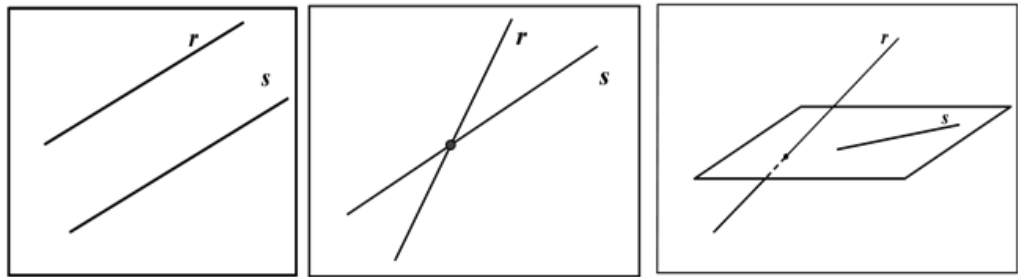
$$(I): \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 3 \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad (II): \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 3 \\ z = 5 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

As equações acima são diferentes, mas descrevem a mesma reta. Atribuindo o mesmo valor de t em ambas as retas, encontramos pontos diferentes sobre a mesma reta. Por exemplo, quando $t=2$ obtemos o ponto $R(-5,3,5)$ nas equações (I) e o ponto $S(-8,3,11)$ nas equações (II). Mas ambos os pontos R e S pertencem à reta.

Mostre que o ponto R pertence à reta cujas equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 3 \\ z = 5 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Duas retas no espaço podem ser paralelas, concorrentes ou reversas:



(1) Retas paralelas

(2) Retas concorrentes

(3) Retas reversas

RETAS PARALELAS

Sejam r e s retas no espaço com vetores diretores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente. As retas r e s são paralelas se, e somente se, os seus vetores diretores são paralelos. Veja a figura:

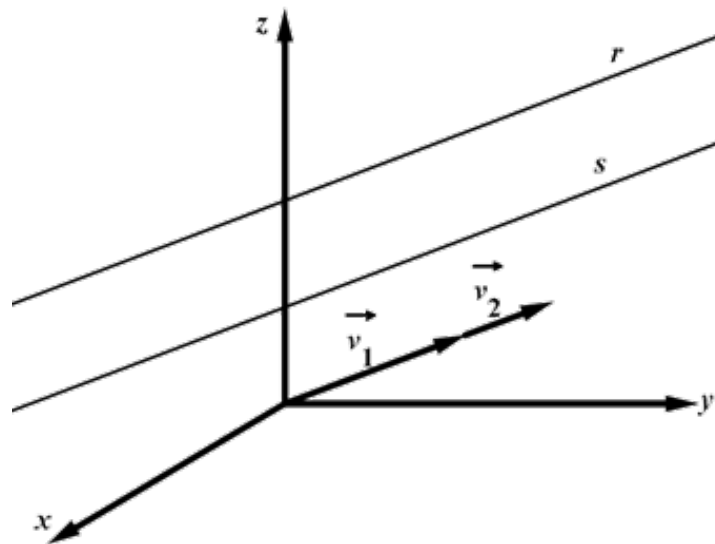


Figura 8

Exemplo 3

As retas

$$(r_1): \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 5 - 2t \\ z = -6 + t \end{cases} \quad \text{e} \quad (r_2): \begin{cases} x = -1 - 6t \\ y = 2 + 4t \\ z = -2t \end{cases}$$

são paralelas, pois um vetor diretor da reta r_1 é $\vec{v}_1 = (3, -2, 1)$ e um vetor diretor da reta r_2 é $\vec{v}_2 = (-6, 4, -2)$ e notemos que:

$$\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1.$$

RETAS CONCORRENTES

Duas retas são concorrentes no espaço, r_1 e r_2 , são concorrentes se elas se interceptam em um ponto.

Exemplo 4

$$(r_1): \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = 5 - 3t \end{cases} \quad (r_2): \begin{cases} x = 3 - 2s \\ y = 2 + 3s \\ z = -4 + 6s \end{cases}$$

As retas acima são concorrentes.

Primeiramente, observemos que o vetor diretor da reta r_1 , $\vec{v}_1 = (-2, 1, -3)$ não é paralelo ao vetor diretor da reta r_2 , $\vec{v}_2 = (-2, 3, 6)$, garantindo assim que as retas não são paralelas.

O sistema

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = 5 - 3t \\ x = 3 - 2s \\ y = 2 + 3s \\ z = -4 + 6s \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 - 2t = 3 - 2s \\ 4 + t = 2 + 3s \\ 5 - 3t = -4 + 6s \end{cases}$$

tem solução $x=1$, $y=5$ e $z=2$. O ponto $P=(1,5,2)$ pertence as duas retas, garantindo assim que elas são concorrentes.

RETAS REVERSAS

Duas retas r_1 e r_2 que não são paralelas ou concorrentes são reversas.

Exemplo:

$$(r_1): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 5t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \quad (r_2): \begin{cases} x = 3 + 4s \\ y = 2s \\ z = 3 - 5s \end{cases}$$

As retas acima são reversas.

Primeiramente, observemos que as retas não são paralelas, pois os vetores diretores $\vec{v}_1 = (2, -5, -2)$ e $\vec{v}_2 = (4, 2, -5)$ das retas r_1 e r_2 respectivamente, não são paralelos.

O sistema

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 5t \\ z = -1 - 2t \\ x = 3 + 4s \\ y = 2s \\ z = 3 - 5s \end{cases}$$

não possui solução, indicando assim, que as retas não são concorrentes.

Quando duas retas no espaço são ortogonais?

Lista de Exercícios

1) Escreva as equações paramétricas da reta definida pelos pontos A(1,-3,-4) e B(3,5,-2)

2) Escreva as equações paramétricas da reta que contém o ponto A(1,-3,-4) e é paralela ao vetor $\vec{v}=(3,-1,4)$

3) Escreva as equações paramétricas da reta que contém o ponto A(2,-1,3) e é paralela a reta cujas equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -3t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$$

4) Encontrar as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto A(1,-3,2) e tem vetor diretor $\vec{v}=(4,-2,5)$.

5) Dada a reta $r: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 4 + t \end{cases}$, faça:

- a) citar um vetor diretor da reta r.
- b) Encontrar o ponto da reta r cuja abscissa é 3.
- c) O ponto P(1,-2,3) pertence a reta r? Justifique.

6) Achar as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos A(2,-1,4) e B(3,2,-1).

7) Determinar a equação da reta que passa pelo ponto A(2,1,-3) e é paralela à reta

$$s: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 4t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

8) Justifique que as retas abaixo são paralelas

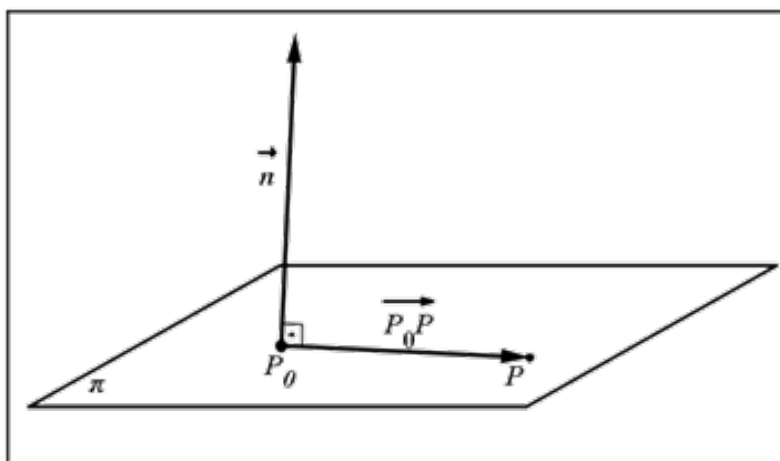
$$r: \begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 2t \\ z = 1 + 5t \end{cases} \quad s: \frac{x-2}{8} = \frac{3-y}{4} = -\frac{z}{10}$$

9) Defina o valor de m para que as retas abaixo sejam ortogonais.

$$r: \begin{cases} y = 4 - 2x \\ z = 3 + mx \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

Planos no Espaço

Seja π um plano. Suponha que $\vec{n} = (a, b, c)$ é um vetor normal ao plano π , isto é, $\vec{n}$ é perpendicular a todo vetor paralelo ao plano π , e, também, seja $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto do plano π . A **condição necessária e suficiente** para que um ponto $P(x, y, z)$ do espaço esteja nesse plano é que $\vec{n}$ seja **ortogonal** ao vetor $\overrightarrow{P_0P}$. Veja a figura:



Mas, já sabemos que ao dizer que os vetores $\vec{n}$ e $\overrightarrow{P_0P}$ são ortogonais significa que o produto escalar entre eles é nulo.

Fazendo $\vec{n} = (a, b, c)$ e $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $P(x, y, z)$, então $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$ nos permite escrever:

$$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

ou ainda

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

que é chamada equação cartesiana do plano π .

Na equação cartesiana do plano

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

podemos efetuar os cálculos e obter

$$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

e escrevendo $-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$, obtemos

$$ax + by + cz + d = 0$$

que é denominada **equação geral do plano π** .

Exemplo 3

Obtenha uma equação geral do plano π que passa pelo ponto $P_0(1, -3, 2)$ e tem $\vec{n} = (2, 4, -5)$ como vetor normal.

Solução:

Para encontrar uma equação do plano precisamos conhecer um vetor normal ao plano e um ponto do plano:

$$\text{Plano } \pi: \begin{cases} \text{vetor normal: } \vec{n} = (2, 4, -5) \\ \text{ponto: } P_0(1, -3, 2) \end{cases}$$

A equação deduzida anteriormente é

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

vamos substituir as coordenadas do ponto A e do vetor normal $\vec{n}$:

$$2(x - 1) + 4[y - (-3)] + (-5)(z - 2) = 0,$$

podemos ainda, efetuar os cálculos e obter:

$$2x + 4y - 5z + 20 = 0$$

que é a equação solicitada.

Atividade I

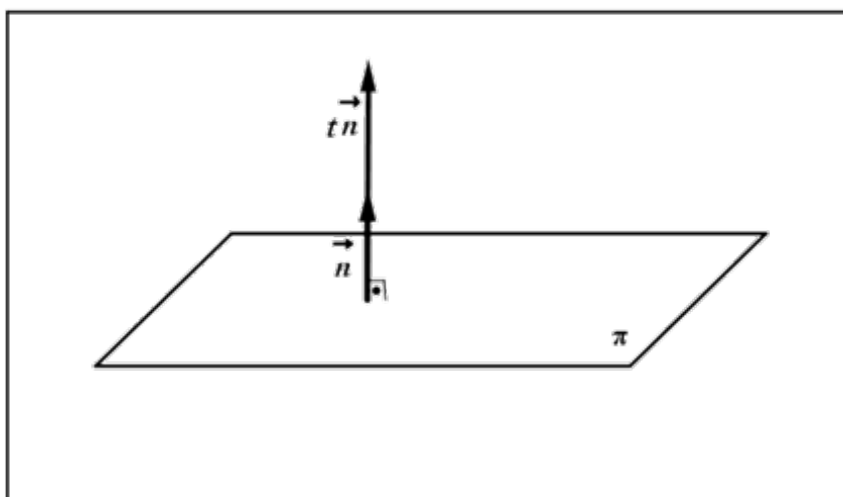
Encontre uma equação para o plano que passa pelo ponto $P_0(1, -3, 2)$ e é normal ao vetor $\vec{i} = (1, 0, 0)$. Esboce esse plano.

Encontre uma equação para o plano que passa pelo ponto $P_0(1, -3, 2)$ e é normal ao vetor $\vec{j} = (0, 1, 0)$. Esboce esse plano.

Encontre uma equação para o plano que passa pelo ponto $P_0(1, -3, 2)$ e é normal ao vetor $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Esboce esse plano.

Observação:

Se $\vec{n} = (a, b, c)$ é um vetor normal a π , então qualquer vetor $t\vec{n}$, $t \neq 0$ é também normal ao plano π . Basta que você observe que $\vec{n}$ e $t\vec{n}$ têm a mesma direção:



Se você substituir o vetor normal $\vec{n}$ normal ao plano por tn obtemos a mesma equação para o plano. Veja o exemplo 2 a seguir.

Exemplo 2

Encontre a equação geral do plano π que passa pelo ponto $A(1, -3, 2)$ e tem $\vec{m} = (6, 12, -15)$ como um vetor normal. (leia o exemplo 1 desta aula e note que $\vec{m} = 3\vec{n}$).

Solução:

Como $\vec{m} = (6, 12, -15)$ é normal a π , temos a equação:

$$6(x-1) + 12[y - (-3)] + (-15)(z-2) = 0,$$

e efetuando os cálculos:

$$6x + 12y - 15z + 60 = 0$$

podemos escrever

$$2x + 4y - 5z + 20 = 0$$

que é a mesma equação obtida no exemplo 1.

Observação:

Seja π um plano cuja equação é $ax + by + cz + d = 0$. É importante notar que os coeficientes a, b e c das variáveis, x, y e z , respectivamente, representam as componentes de um vetor normal ao plano.

Exemplo 3

Cite um vetor normal ao plano $5x - 3y + 2z - 4 = 0$

Solução:

Os coeficientes das variáveis, x, y e z são $5, -3$ e 2 respectivamente, assim um vetor normal ao plano é $\vec{n} = (5, -3, 2)$.

Um pouco mais...

Se você trocar o ponto P_0 , por onde o plano passa, por outro ponto A do mesmo plano, os valores a, b, c e d da equação se alteram?

Atividade II

Obtenha uma equação geral do plano π que passa pelo ponto $P_0(-1, -2, 2)$ e tem $\vec{n} = (2, 4, -5)$ como vetor normal. (Compare com o exemplo 1)

Trabalhando com a Equação

Para obter pontos de um plano que tem equação

$$ax + by + cz + d = 0,$$

basta atribuir valores arbitrários a duas variáveis e calcular o valor da outra na equação dada.

No **EXEMPLO 1** encontramos a equação geral $2x+4y-5z+20=0$ para o plano que tem vetor normal $\vec{n}=(2,4,-5)$ e passa pelo ponto $A(1,-3,2)$. Para determinarmos outro ponto deste plano, vamos fazer $x=4$ e $y=3$ na equação anterior e teremos:

$$2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 - 5z + 20 = 0$$

$$8 + 12 - 5z + 20 = 0$$

$$-5z = -40$$

$$z = 8$$

e, portanto, o ponto $P(4,3,8)$ pertence ao plano.

Para determinar se um ponto do espaço pertence ao plano, basta substituir suas coordenadas x, y e z na equação e verificar se ela é satisfeita. Por exemplo, o ponto $R(1,-3,2)$ pertence ao plano $2x+4y-5z+20=0$, pois

$$2 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) - 5 \cdot (2) + 20 = 0.$$

Já o ponto $S(3,2,-1)$ não pertence ao plano, pois

$$2 \cdot 3 + 4 \cdot (2) - 5 \cdot (-1) + 20 = 6 + 8 + 5 + 20 = 39 \neq 0.$$

Atividade III

Existem várias formas de se determinar um plano, vejamos algumas:

- 1) Três pontos não colineares determinam um plano;
- 2) Duas retas paralelas determinam um plano;
- 3) Duas retas concorrentes determinam um plano.

Lembre-se que para encontrar uma equação de um plano precisamos conhecer um vetor normal ao plano e um ponto do plano, para cada um dos casos citados anteriormente, diga como você encontra um vetor normal ao plano.

Lista de Exercícios

1) Encontre a equação do plano que passa pelo ponto $A(2, -1, 3)$ e tem vetor normal $\vec{n} = (3, 4, 5)$.

2) Cite um vetor normal e dois pontos do plano $3x - y + 4z - 6 = 0$.

3) Dado o plano $2x - 4y - 3z + 4 = 0$. Encontrar:

a) O ponto do plano cuja abscissa é 3 e ordenada é -5.

b) O ponto do plano cuja ordenada é -1 e cota é 4.

c) O valor de m para que o ponto $P(n, 2n, 3n)$ pertença ao plano.

4) Achar a equação do plano que passa pelos pontos $A(3, -1, 2)$, $B(1, 0, 4)$ e $C(2, -2, 1)$.

5) Determinar a equação do plano que passa pelo ponto $A(1, -3, 2)$ e é paralelo ao plano $2x - 3y + z - 5 = 0$.

6) Justifique a seguinte afirmação:

Os planos $2x + y - 2z - 1 = 0$ e $4x + 2y - 4z - 4 = 0$ são paralelos.

8) Achar a equação do plano que passa pelo ponto $A(1, -3, 2)$ e é perpendicular à reta

$$r: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$$

9) Determinar o ponto de interseção da reta $r: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$

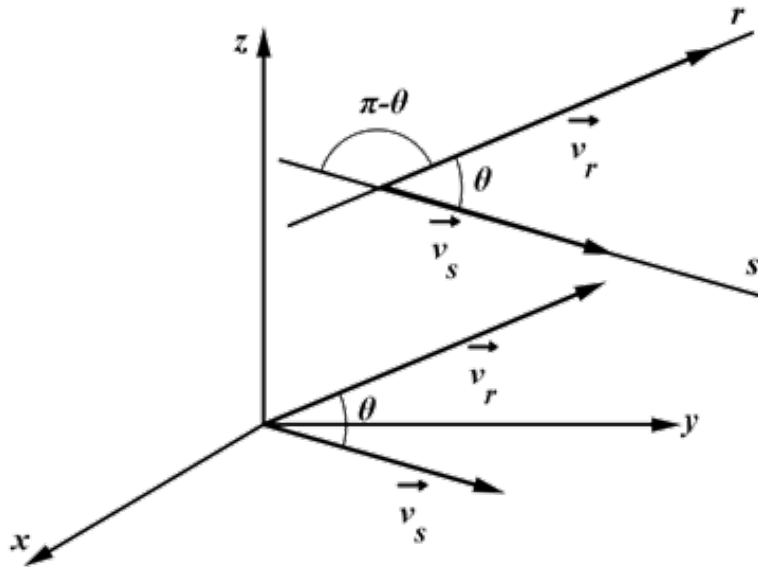
10) Encontrar as equações paramétricas da interseção dos dois planos $2x - y + 3z - 5 = 0$ e $3x + y - 2z - 1 = 0$.

11) A reta $r: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ está contida no plano $2x + 3y - 4z - 5 = 0$?

Ângulos

Ângulo Entre Duas Retas

Sejam r e s retas com vetores diretores $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$, respectivamente. O ângulo entre as retas r e s é o menor ângulo entre um vetor diretor de r e um vetor diretor de s .



Sendo θ este ângulo observamos que $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e disso $\cos \theta$ é um número maior ou igual a zero e podemos escrever

$$\cos \theta = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r| |\vec{v}_s|}$$

Exemplo 1

Calcular o ângulo entre as retas

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 - t \\ z = -t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

Um vetor diretor da reta r é $\vec{v}_r = (2, -1, -1)$ e um vetor diretor da reta s é $\vec{v}_s = (-1, -1, 2)$. Calculando os seus módulos:

$$|\vec{v}_r| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{v}_s| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

O produto escalar entre $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = -2 + 1 - 2 = -3$$

temos então que

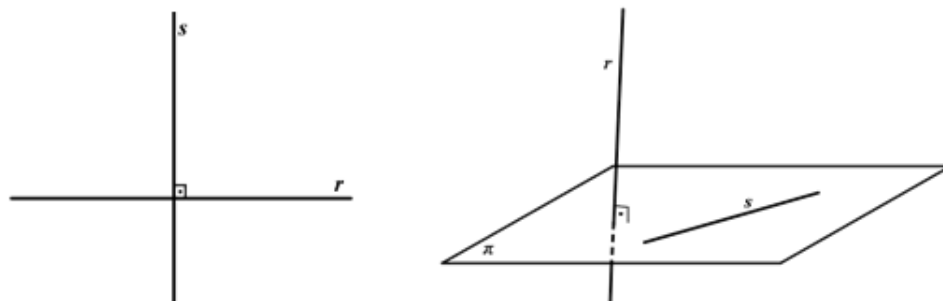
$$\cos \theta = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s|} = \frac{|-3|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

e disso,

$$\theta = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Observação:

Observe que as retas r e s são ortogonais se, e somente se, $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0$.



Exemplo 2

Mostre que as retas abaixo são ortogonais.

$$r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 5 + t \\ z = t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 4t \end{cases}$$

Solução:

Um vetor diretor de r é $\vec{v}_r = (-2, 1, 1)$

Um vetor diretor de s é $\vec{v}_s = (1, -2, 4)$

Calculando o produto escalar de $\vec{v}_r$ por $\vec{v}_s$:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = -2 - 2 + 4 = 0,$$

logo as retas r e s são ortogonais.

Exemplo 3

Mostre que as retas abaixo não são ortogonais.

$$(r): \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - 2t \\ z = -t \end{cases} \quad (s): \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Solução:

Um vetor diretor de r é $\vec{v}_r = (3, -2, -1)$

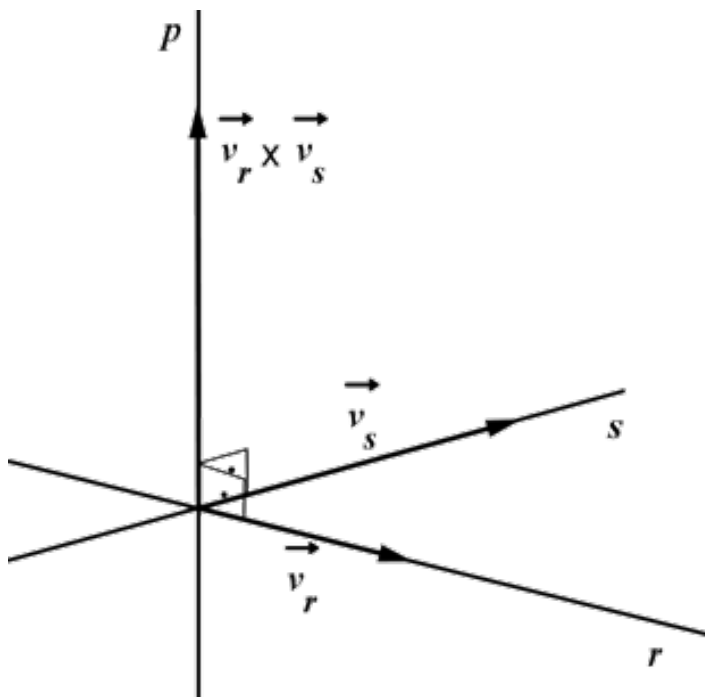
Um vetor diretor de s é $\vec{v}_s = (3, -4, 1)$

Calculando o produto escalar de v_r por v_s :

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 9 + 8 - 1 = 16 \neq 0,$$

logo as retas r e s não são ortogonais.

Dadas duas retas r e s não paralelas com vetores diretores $\vec{v}_s$ e $\vec{v}_r$, respectivamente, uma reta p simultaneamente ortogonal a r e s tem a direção do vetor $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$.



e a reta fica determinada quando conhecemos um de seus pontos.

Exemplo 4

Encontre as equações da reta p que passa pelo ponto $A(1, -3, 4)$ e é ortogonal às retas:

$$r: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -t \\ z = 4 + 2t \end{cases} \quad \text{e} \quad s: (x - 4, y - 3, z) = t(1, 3, 0)$$

Solução:

Um vetor diretor de r é $\vec{v}_r = (3, -1, 2)$

Um vetor diretor de s é $\vec{v}_s = (1, 3, 0)$

Calculando o produto vetorial de v_r por v_s :

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 2\vec{j} + 10\vec{k}$$

Um vetor diretor da reta p é $\vec{v}_r \times \vec{v}_s = (-6, 2, 10)$. Para escrever as equações paramétricas de p :

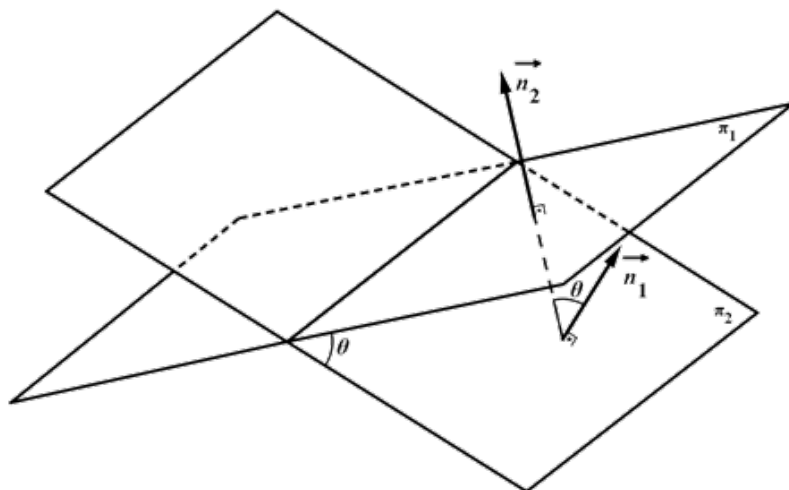
$$p: \begin{cases} \text{Vetor diretor: } \vec{v} = (-6, 2, 10) \\ \text{Ponto: } A(1, -3, 4) \end{cases}$$

disso,

$$p: \begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = -3 + 2t \\ z = 4 + 10t \end{cases}$$

Ângulo Entre Dois Planos

Sejam π_1 e π_2 planos com vetores normais $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$, respectivamente. O ângulo entre os planos π_1 e π_2 é o menor ângulo que um vetor normal a π_1 forma com um vetor normal a π_2 .



Sendo θ este ângulo observamos que $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Disso $\cos \theta$ é um número maior ou igual a zero e podemos escrever

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

Exemplo 5

Determinar o ângulo entre os planos

$$\pi_1: x+z+5=0$$

$$\pi_2: -x+y-2z-3=0$$

Solução:

Um vetor normal ao plano π_1 é $\vec{n}_1 = (1, 0, 1)$

Um vetor normal ao plano π_2 é $\vec{n}_2 = (-1, 1, -2)$.

Calculando os módulos de $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$:

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{n}_2| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

Calculando o produto escalar de $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -1 - 2 = -3$$

Disso,

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|-3|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{12}}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e daí

$$\theta = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Dois planos π_1 e π_2 com vetores normais $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ respectivamente, são perpendiculares se, e somente se, os seus vetores normais são ortogonais, isto é, $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.

Exemplo 6

Os planos

$$\pi_1: 2x - y + z + 7 = 0 \text{ e}$$

$$\pi_2: x + y - z - 2 = 0$$

são perpendiculares.

Solução:

Um vetor normal ao plano π_1 é $n_1 = (2, -1, 1)$

Um vetor normal ao plano π_2 é $n_2 = (1, 1, -1)$.

Calculando

$$n_1 \cdot n_2 = (2, -1, 1) \cdot (1, 1, -1) = 2 - 1 - 1 = 0$$

Como $n_1 \cdot n_2 = 0$ os planos são perpendiculares.

Atividade I

Nesta aula, você aprendeu a calcular o ângulo entre duas retas e o ângulo entre dois planos. Agora, faça uma pesquisa sobre ângulo entre uma reta e um plano.

Lista de Exercícios

1) Determinar o ângulo entre as retas:

$$\text{a) } r: \begin{cases} x = 2t \\ y = -6 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = 2t \\ y = -6 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

$$\text{b) } r: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 + t \\ z = -3 - t \end{cases}$$

2) Qual o valor de m para que as retas abaixo sejam ortogonais?

$$r: \begin{cases} x = mt - 3 \\ y = 1 + 3t \\ z = -4t \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

3) Qual o valor de m para que seja de 30° o ângulo entre a reta

$$r: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 + 5t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad \text{e a reta determinada pelos pontos } A(-1, 0, 1) \text{ e } B(0, n, 3).$$

4) Encontrar as equações paramétricas da reta que passa por $A(2, -1, 3)$ e é simultaneamente ortogonal às retas

$$a) r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad e \quad s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

5) Qual o valor de m para que os planos $\pi_1 = 2x + 3y - z + 4 = 0$ e $\pi_2 = mx - 6y + 2z + 3 = 0$ sejam paralelos?

6) Determinar o ângulo entre os planos

a) $\pi_1 = 2x - 4y - 2z + 2 = 0$ e $\pi_2 = 2x - y - z + 5 = 0$

b) $\pi_1 = x - y + 3 = 0$ e $\pi_2 = 2x - y - z + 4 = 0$

7) Qual o valor de m para que os planos $\pi_1 = mx + 2y - 6z + 4 = 0$ e $\pi_2 = 2x + 6my + 4z + 4 = 0$ sejam perpendiculares?

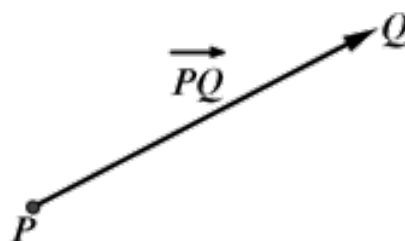
8) Determinar o valor de m para que o ângulo entre os planos $\pi_1 = 2x + ny + 4z - 3 = 0$ e $\pi_2 = 4x + 5y + 3z + 1 = 0$ seja de 30° .

Distâncias no Espaço Tridimensional

Distância Entre Dois Pontos

Dados dois pontos $P(x_1, y_1, z_1)$ e $Q(x_2, y_2, z_2)$ a distância entre P e Q é o módulo do vetor $\overrightarrow{PQ}$, isto é,

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}|$$



Sabemos que $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, e disso

$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, e portanto

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Exemplo 1

Determine a distância entre os pontos $P(2, -3, 4)$ e $Q(3, -1, 2)$.

Solução:

Primeiramente, vamos determinar o vetor $\overrightarrow{PQ}$

$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (3, -1, 2) - (2, -3, 4) = (1, 2, -2)$, e disso

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3,$$

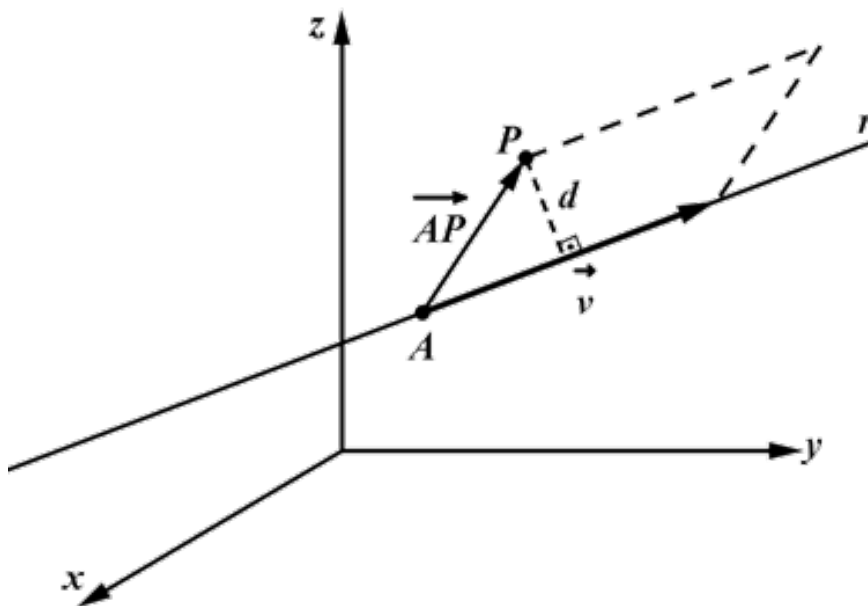
ou diretamente:

$$d(P, Q) = \sqrt{(3 - 2)^2 + [-1 - (-3)]^2 + (2 - 4)^2}$$

$$d(P, Q) = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

Distância de um Ponto a uma Reta

Seja $P(x_p, y_p, z_p)$ um ponto qualquer do espaço e r uma reta definida por um ponto $A(x_a, y_a, z_a)$ e um vetor diretor $\vec{v}=(a_r, b_r, c_r)$. Os vetores $\vec{AP}$ e $\vec{v}$ determinam um paralelogramo:



a altura desse paralelogramo é a distância do ponto P à reta r , $d(P,r)$. Chamando a área do paralelogramo de A_p sabemos que

$$A_p = \text{base} \times \text{altura} = |\vec{v}| \cdot d$$

Podemos determinar a área do paralelogramo usando o módulo do produto vetorial

$$A_p = |\vec{v} \times \overrightarrow{AP}|$$

então podemos escrever

$$|\vec{v}| \cdot d = |\vec{v} \times \overrightarrow{AP}|$$

e disso

$$d = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}|}$$

ou seja:

$$d(P, r) = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}|}$$

em que A é um ponto da reta r e $\vec{v}$ é um vetor diretor da reta r .

Observação:

Se $P \in r$, então $d(P, r) = 0$.

Calcule a distância do ponto $P(3, -2, 4)$ à reta $r: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = -t \end{cases}$

Solução:

Primeiramente vamos determinar um ponto da reta r , fazendo, por exemplo, $t=0$. Obtemos:

$A(2, 1, 0)$.

Um vetor diretor da reta r pode ser obtido observando-se os coeficientes de t nas equações paramétricas de r :

$\vec{v} = (-3, 2, -1)$

pela fórmula

$$d(P, r) = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}|} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AP} = (P - A) = (1, -3, 4),$$

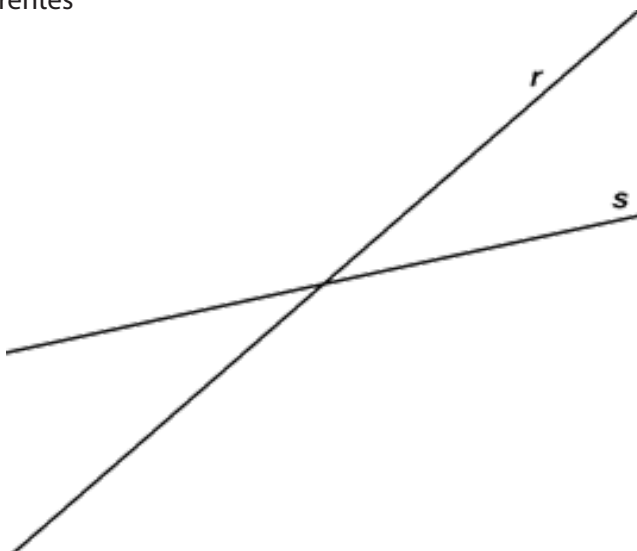
temos

$$d(P, r) = \frac{|(-3, 2, -1) \times (1, -3, 4)|}{|(-3, 2, -1)|} = \frac{|(5, 11, 7)|}{|(-3)^2 + 2^2 + (-1)^2|} = \frac{\sqrt{5^2 + 11^2 + 7^2}}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{195}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{195}{14}}.$$

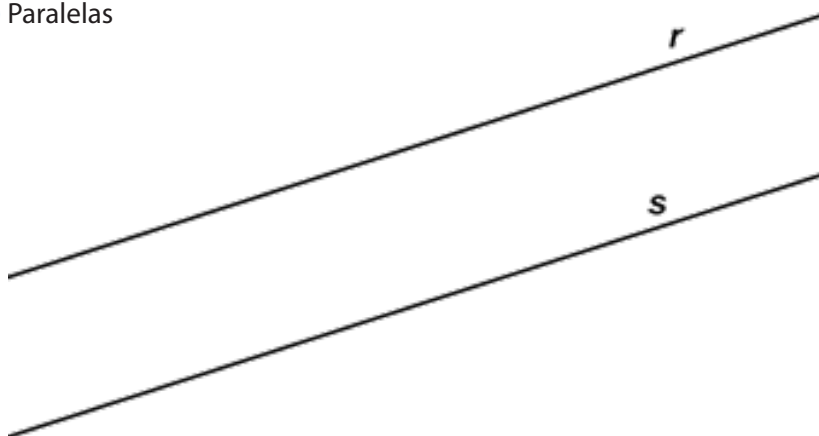
Distância entre duas retas

Já sabemos que duas retas r e s no espaço tridimensional podem ser:

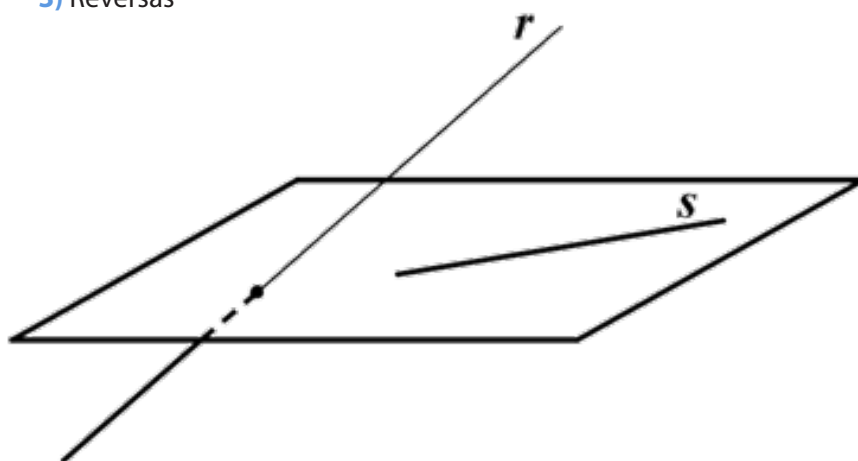
1) Concorrentes



2) Paralelas



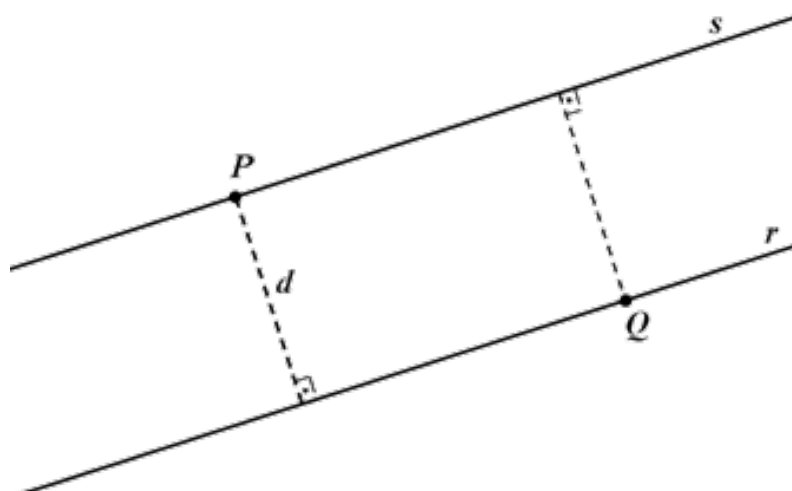
3) Reversas



Se as retas r e s são concorrentes então a distância entre elas é nula e escrevemos $d(r,s)=0$.

Retas Paralelas

Se as retas r e s são paralelas a distância entre elas é a distância de um ponto qualquer P de uma delas à outra reta, observe



Disso,

$$d(s,r)=d(P,r), P \in r$$

$$\text{ou } d(r,s)=d(Q,s), Q \in r.$$

Mas já sabemos calcular a distância de um ponto a uma reta.

Calcule a distância entre as retas $r: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = -3 + t \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 4t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

Solução:

As retas r e s são paralelas, pois um vetor diretor de r é $\vec{v}_r = (-2, 2, 1)$ e um vetor diretor de s é $\vec{v}_s = (-4, 4, 2)$ e observamos que $\frac{-2}{-4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Vamos calcular a distância entre r e s usando $d(r,s) = d(P,s)$ onde $P \in r$.

Um ponto da reta s é $A(3,0,1)$ e um ponto da reta r é $P(2,1,-3)$ daí,

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (2, 1, -3) - (3, 0, 1) = (-1, 1, -4)$$

$$d(P,s) = \frac{|\vec{v}_s \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}_s|} = \frac{|(-4, 4, 2) \times (-1, 1, -4)|}{|(-4, 4, 2)|} = \frac{|(-18, -18, 0)|}{|(-4, 4, 2)|} = \frac{\sqrt{18^2 + 18^2}}{\sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{36}} = \frac{18\sqrt{2}}{6} = 3\sqrt{2}$$

Daí,

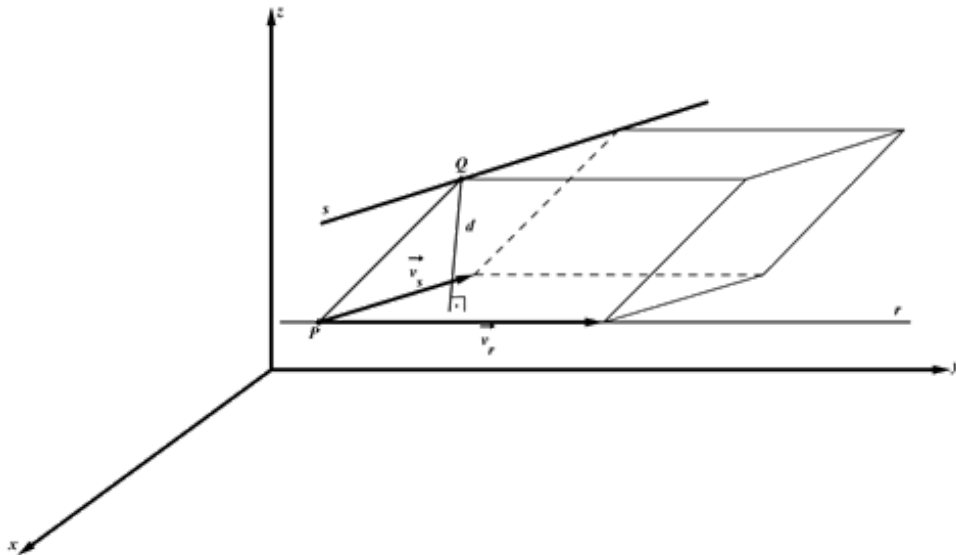
$$d(r,s) = 3\sqrt{2}.$$

Atividade I

Calcule $d(r,s)=d(Q,r)$, $Q \in s$.

Retas Reversas

Sejam r e s retas reversas. Sejam $P(x_1, y_1, z_1)$ um ponto de r e $\vec{v}_r = (a_1, b_1, c_1)$ um vetor diretor de r e sejam $Q(x_2, y_2, z_2)$ um ponto de s e $\vec{v}_s = (a_2, b_2, c_2)$ um vetor diretor de s . Os vetores $\vec{v}_r, \vec{v}_s$ e $\vec{PQ}$ determinam um paralelepípedo. Veja a figura a seguir.



Observe que a reta r pertence ao plano da base do paralelepípedo e a reta s é paralela a essa base, pois tem a direção do vetor $\vec{v}_s$.

Note que a base do paralelepípedo é o paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ e a altura desse paralelepípedo é a distância entre as retas r e s .

Sabemos que o volume V_p do paralelepípedo é

$$V_p = (\text{área da base}) \times \text{altura}$$

$$V_p = |\vec{v}_r \times \vec{v}_s| \cdot d$$

podemos determinar V_p usando o módulo do produto misto:

$$V_p = |(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{PQ})|$$

Então podemos escrever

$$|\vec{v}_r \times \vec{v}_s| \cdot d = |(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{PQ})|$$

e disso

$$d = \frac{|(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{PQ})|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}$$

portanto

$$d(r, s) = \frac{|(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{PQ})|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}$$

Exemplo 4

Calcular as distâncias entre as retas $r: \begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = 2t \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

Solução:

Um vetor diretor de r é $\vec{v}_r = (1, 0, 2)$ e um vetor diretor de s é $\vec{v}_s = (1, 1, 1)$. Como $1/1 \neq 0/1$ as retas não são paralelas. Um ponto da reta r é $P(0, 3, 0)$ e um ponto da reta s é $Q(0, 0, 0)$. Calculando o produto misto de $\vec{v}_r, \vec{v}_s$ e $\overrightarrow{PQ}$:

$$(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{PQ}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

as retas são reversas.

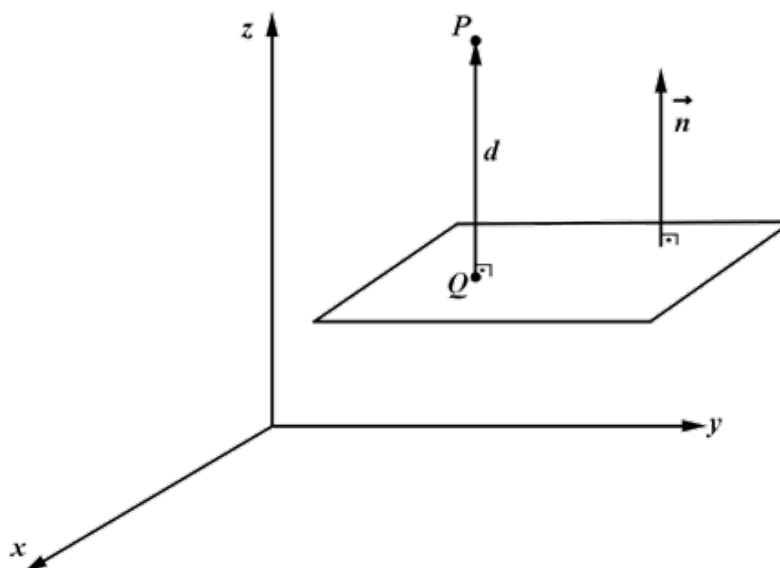
Vamos calcular a distância entre as retas reversas r e s :

$$d(r, s) = \frac{|\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{|3|}{|(1, 0, 2) \times (1, 1, 1)|} = \frac{3}{|(-2, 1, 1)|} = \frac{3}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

Distância de um ponto a um plano

Sejam $P(x_p, y_p, z_p)$ um ponto do espaço e $\pi: ax + by + cz + d = 0$ um plano.

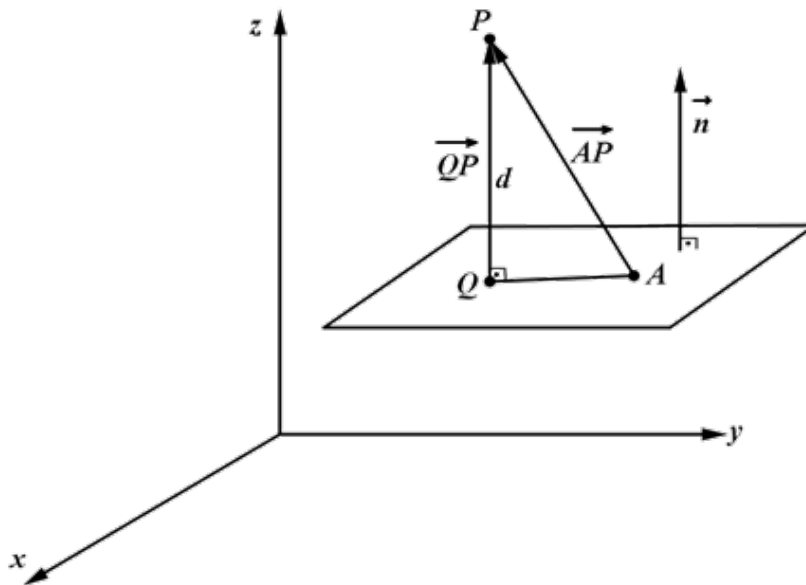
Trace por P uma perpendicular ao plano π que a intercepta no ponto Q . Veja a figura a seguir:



Note que o vetor normal ao plano π e o vetor QP possuem a mesma direção.
A distância d do ponto P ao plano π é

$$d = d(P, \pi) = |\overrightarrow{QP}|$$

Seja $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer do plano π e observe que o vetor QP é a projeção do vetor AP na direção do vetor $\vec{n}$. Veja a figura a seguir.



Sabemos que a projeção do vetor $\overrightarrow{AP}$ sobre o vetor $\vec{n}$ é

$$\overrightarrow{QP} = \text{proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{AP} = \left(\frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \right) \vec{n}$$

e disso

$$|\overrightarrow{QP}| = \left| \left(\frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \right) \vec{n} \right|$$

podemos escrever

$$|\overrightarrow{QP}| = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|^2} |\vec{n}| = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

temos:

$$\vec{n} = (a, b, c) \Rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

então:

$$d(P, \pi) = |\overrightarrow{QP}| = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

$$d(P, \pi) = \frac{|(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \cdot (a, b, c)|}{|(a, b, c)|}$$

$$d(P, \pi) = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - ax_0 - by_0 - cz_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

e como $ax_0 - by_0 - cz_0 = d$, pois o ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ pertence ao plano

$\pi: ax + by + cz + d = 0$. Podemos escrever

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exemplo 5

Calcule a distância do ponto $P(2, -3, -10)$ ao plano $\pi: 2x - 2y + z - 6 = 0$.

Solução:

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - ax_0 - by_0 - cz_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

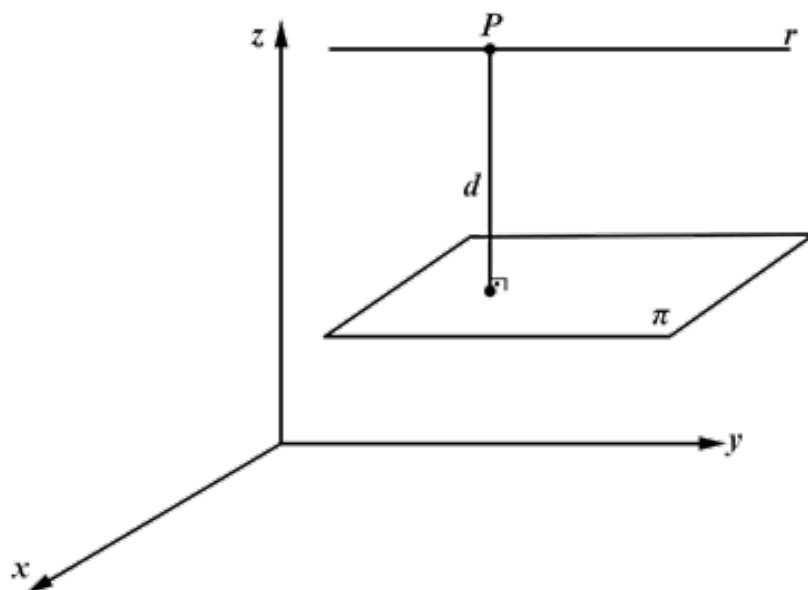
$$d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) + (-10) \cdot 1 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}}$$

$$d(P, \pi) = \frac{|4 + 6 - 10 - 6|}{\sqrt{9}}$$

$$d(P, \pi) = \frac{|-6|}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Distância de uma reta a um plano

Só podemos falar da distância de uma reta a um plano somente quando a reta é paralela ao plano. Você sabe por quê?



Seja r uma reta paralela a um plano π , a distância d da reta ao plano é a distância de qualquer ponto da reta ao plano. Já sabemos calcular a distância de um ponto a um plano. Então, se P é um ponto de r , temos

$$d(P, \pi) = d(r, \pi) = d(P, \pi)$$

Exemplo 6

Calcule a distância entre a reta $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$ e o plano

$$\pi: 6x - y + 4z - 2 = 0$$

Solução:

Fazendo $t = 0$, obtemos o ponto $P(1, -2, 3)$ da reta r . Um vetor normal ao plano π é

$$\vec{n} = (6, -1, 4)$$

$$d(r, \pi) = d(P, \pi)$$

$$d(r, \pi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - ax_0 - by_0 - cz_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

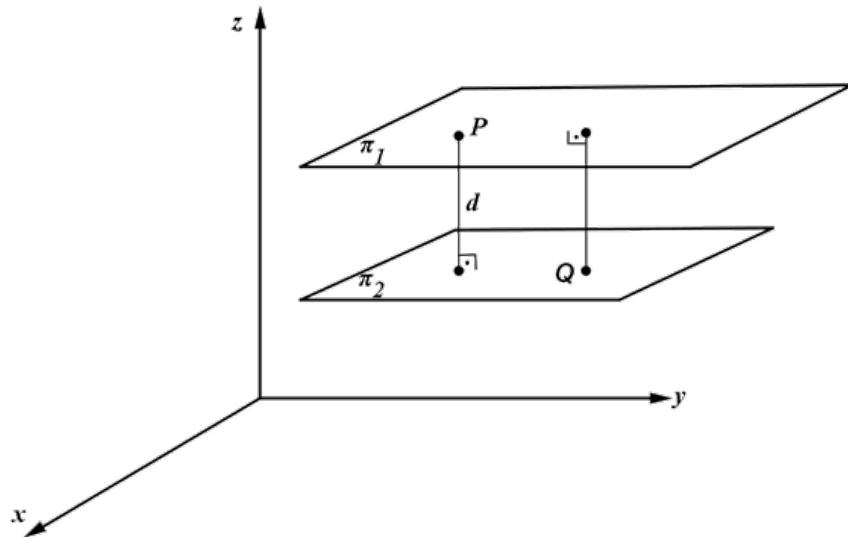
$$d(r, \pi) = \frac{|6 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 4 \cdot 3 - 2|}{\sqrt{6^2 + (-1)^2 + 4^2}}$$

$$d(r, \pi) = \frac{|18|}{\sqrt{53}} = \frac{18}{\sqrt{53}}$$

Distância entre dois planos

Só faz sentido falar de distância entre dois planos quando esses planos são paralelos.

Sejam π_1 e π_2 planos paralelos, a distância d entre os planos é a distância entre um ponto qualquer de um dos planos ao outro plano:



Como já sabemos calcular a distância de um ponto P a um plano π segue

$$d = d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2), P \in \pi_1,$$

ou

$$d = d(\pi_1, \pi_2) = d(Q, \pi_1), Q \in \pi_2$$

Atividade

Calcular a distância entre os planos $\pi_1: 6x - y + 4z - 2 = 0$ e $\pi_2: x - 3z + 4 = 0$.

Lista de Exercícios

- 1) Calcular a distância entre os pontos $P(-1,3,4)$ e $Q(3,-2,-1)$.
- 2) Encontrar no eixo das abscissas, um ponto equidistante de $P(3,2,1)$ e $C(2,1,1)$.
- 3) Calcular a distância do ponto $P(-3,2,1)$ à reta $r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = 3t \end{cases}$
- 4) Calcular a distância entre as retas $r: (x-2, y+3, z-1) = t(1, -2, 4)$ e $s: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 + 4t \\ z = 8t \end{cases}$
- 5) Calcular a distância entre as retas $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 3t \\ z = 4 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$
- 6) Qual é a distância da origem $O(0,0,0)$ à reta $r: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2t \\ z = 4 \end{cases}$
- 7) Calcular a distância do ponto $P(3,-1,4)$ ao plano $\pi: 2x + y - 3z + 1 = 0$.
- 8) Calcular a distância da reta $r: \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$ ao plano $\pi: x - y + 5z - 3 = 0$.
- 9) Qual é a distância da origem $O(0,0,0)$ ao plano $\pi: 3x + 2y - z + 4 = 0$
- 10) Calcular a distância entre os planos $\pi_1: 2x + y - 3z + 1 = 0$ e $\pi_2: 4x + 2y - 6z + 5 = 0$.

Superfícies Quádricas

Uma equação do 2º grau nas variáveis x, y e z

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz = J$$

onde $A, B, C, D, \dots, J$ são números reais e pelo menos um dos coeficientes A, B, C, D, E ou F é diferente de zero representa uma **superfície quádrica**.

Vamos estudar as superfícies **quádricas centradas** representadas pela equação

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = J$$

e as superfícies **quádricas não centradas** representadas por uma das equações:

$$Ax^2 + By^2 + Gx = 0$$

$$Ax^2 + Hy + Cz^2 = 0$$

$$Gx + By^2 + Cz^2 = 0$$

A interseção destas superfícies com planos coordenados xy, xz, yz ou paralelos a estes podem ser de um dos tipos:

cônica, circunferência, uma reta, duas retas, um ponto ou vazio.

Essas curvas de interseção serão chamadas de **traço da superfície no plano**.

I) SUPERFÍCIES QUÁDRICAS CENTRADAS

1) ELIPSÓIDE:

Tomando A, B, C e J números reais positivos em $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = J$ esta equação representa um elipsóide.

Exemplo 1

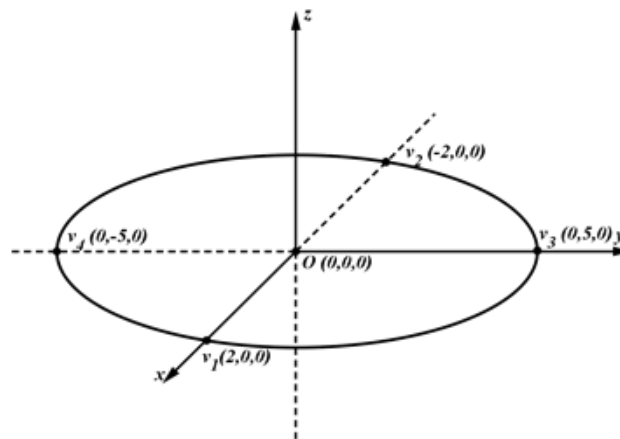
Esboce o elipsóide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$

Solução:

Vamos analisar as interseções desta superfície com planos coordenados:

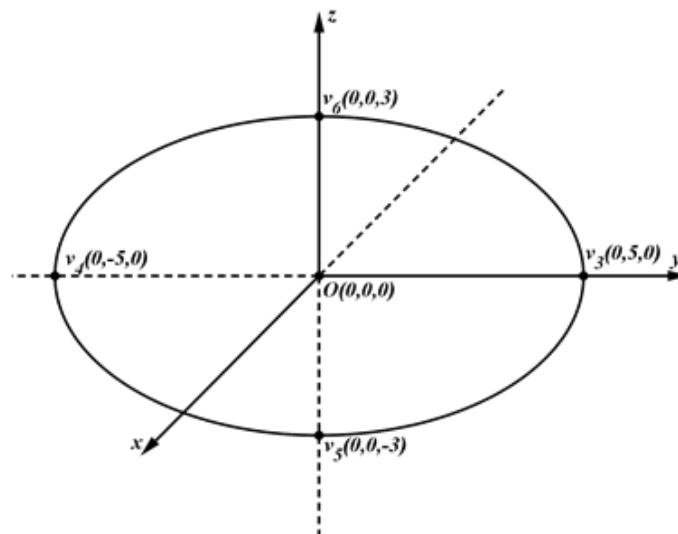
1º) No plano xy : faça $z = 0$ na equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$

Obtemos $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ uma elipse no plano xy :



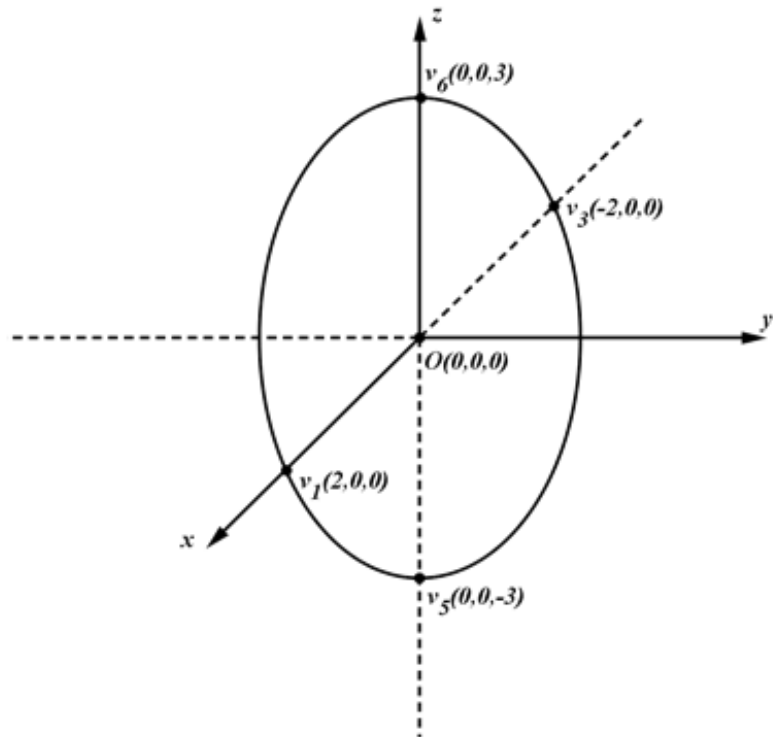
2º) No plano yz : faça $x = 0$ na equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$

Obtemos $\frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$ uma elipse no plano yz :

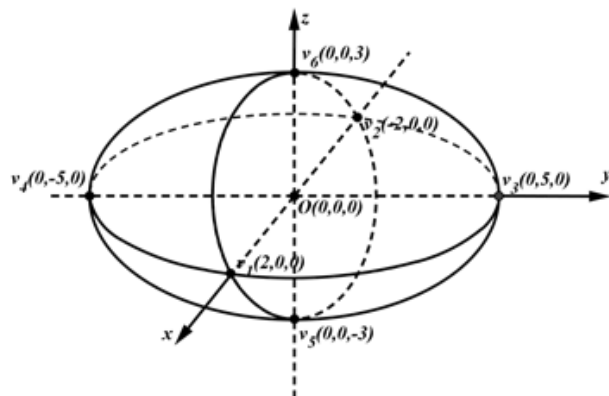


3º) No plano xz : faça $y = 0$ na equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$

Obtemos $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ uma elipse no plano xz :



O esboço no espaço tridimensional é



2) HIPERBOLÓIDE DE UMA FOLHA

Tomando A, B, C , e J não nulos e apenas um entre A, B e C negativo, com $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = J$, esta equação representa em **hiperbolóide de uma folha**.

Exemplo 2

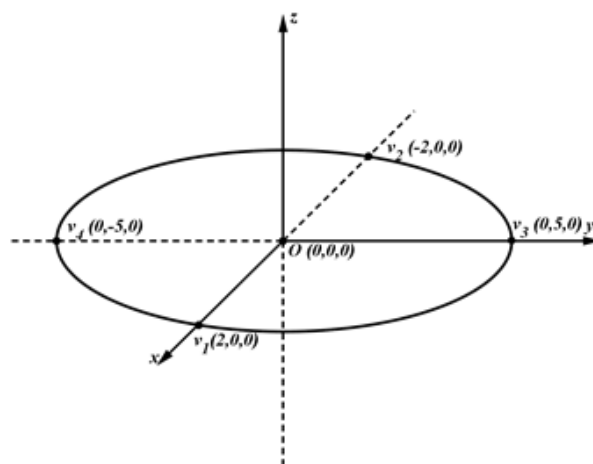
Esboce o hiperbolóide de uma folha $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{9} = 1$.

Solução:

Vamos analisar as interseções desta superfície com planos coordenados:

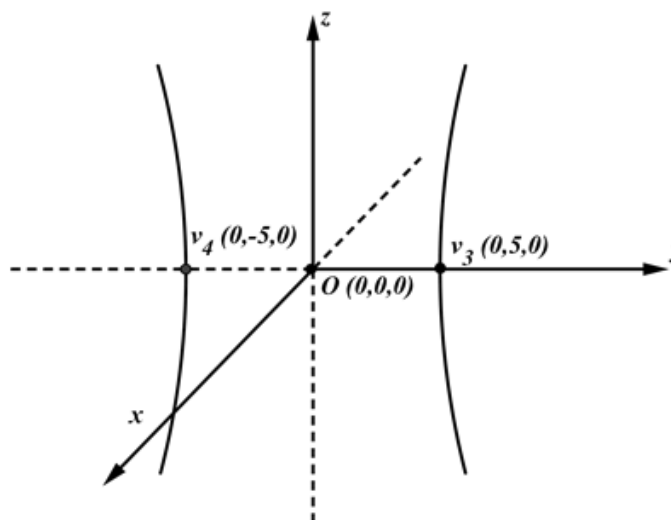
1º) No plano xy : faça $z = 0$ na equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{9} = 1$.

Obtemos $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ uma elipse no plano xy :



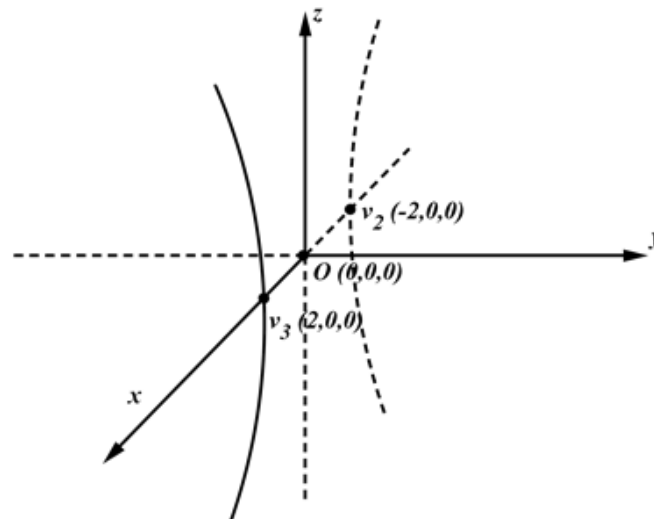
2º) No plano yz : faça $x = 0$ na equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{9} = 1$

Obtemos $\frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{9} = 1$ uma hipérbole no plano yz :

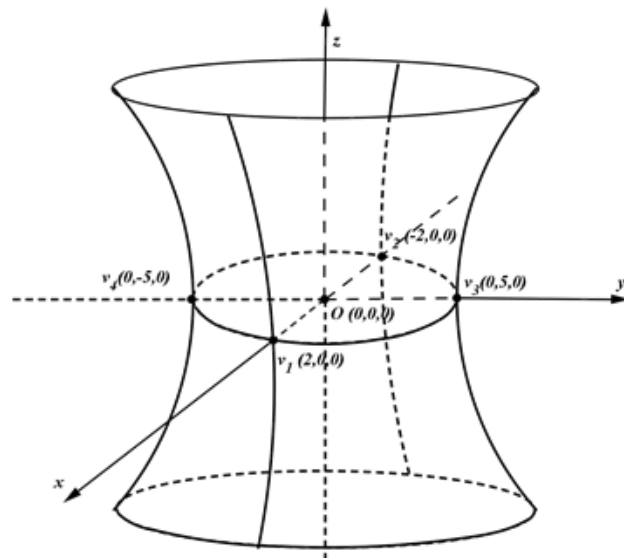


3º) No plano xz : faça $y = 0$ na equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{9} = 1$

Obtemos $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ uma hipérbole no plano xz :



O esboço do hiperbolóide de uma folha no espaço tridimensional é



3) HIPERBOLÓIDE DE DUAS FOLHAS

Tomando A, B, C , e J não nulos e apenas um entre A, B e C positivo em $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = J$ esta equação representa um **hiperbolóide de 2 folhas**.

Exemplo 3

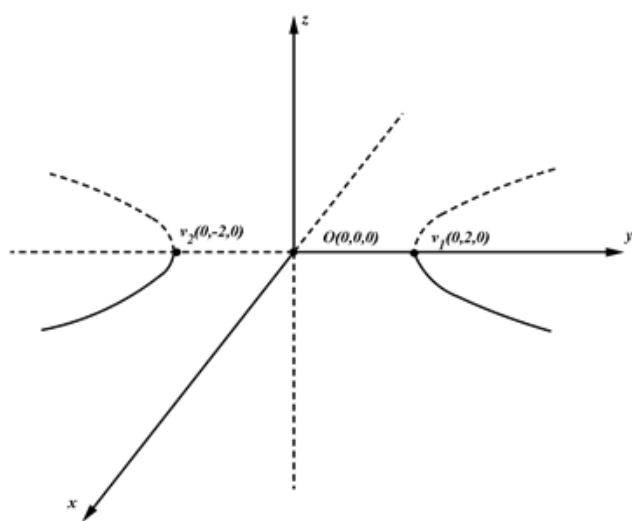
Esboce o hiperbolóide de uma folha $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{25} - \frac{z^2}{16} = 1$.

Solução:

Vamos analisar as interseções desta superfície com planos coordenados:

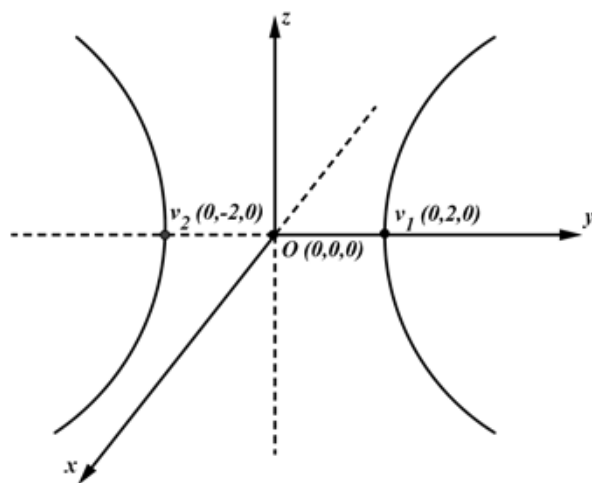
1º) No plano xy : faça $z = 0$ na equação $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{25} - \frac{z^2}{16} = 1$.

Obtemos $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{25} = 1$ uma hipérbole no plano xy :



2º) No plano yz : faça $x = 0$ na equação $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{25} - \frac{z^2}{16} = 1$.

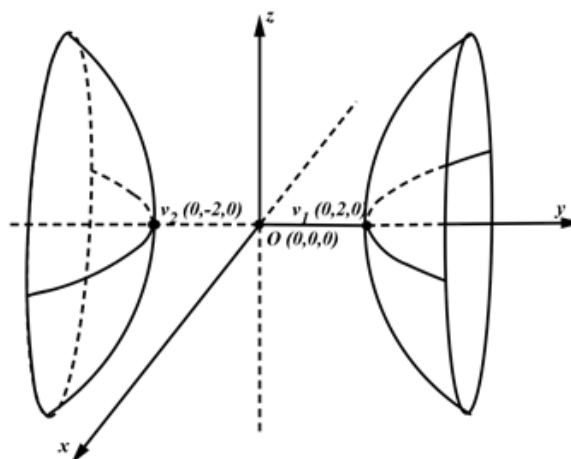
Obtemos $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$ uma hipérbole no plano yz :



3º) No plano xz : faça $y = 0$ na equação

Obtemos o conjunto vazio, indicando que a nossa superfície não intercepta o plano xz .

O esboço do hiperbolóide de duas folhas no espaço tridimensional é



II) SUPERFÍCIES QUÁDRICAS NÃO CENTRADAS

1) PARABOLÓIDE ELÍPTICO

Cada uma das equações

$$Ax^2 + By^2 + Gx = 0$$

$$Ax^2 + Hy + Cz^2 = 0$$

$$Gx + By^2 + Cz^2 = 0$$

representa um **parabolóide elíptico** se os coeficientes dos termos de segundo grau tiverem o **mesmo** sinal e o coeficiente do termo de primeiro grau for **diferente de zero**.

Exemplo 4

Esboce o parabolóide elíptico $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25}$.

Solução:

Vamos analisar as interseções desta superfície com planos coordenados:

1º) No plano xy : faça $z = 0$ na equação $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25}$.

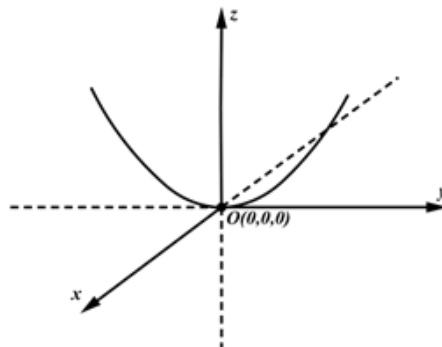
Obtemos

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 0 \text{ e a única solução é } x = y = 0.$$

Disso o ponto $(0,0,0)$ pertence ao parabolóide.

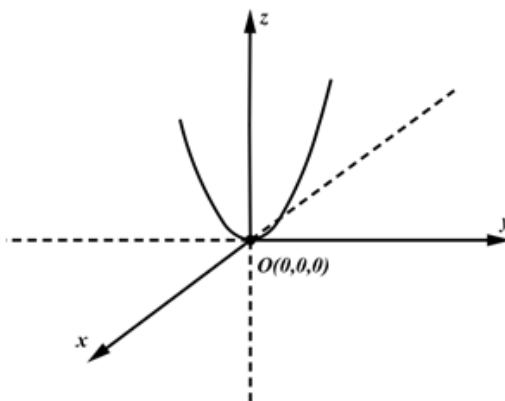
2º) No plano yz : faça $x = 0$ na equação $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25}$.

Obtemos $z = \frac{y^2}{25}$, uma parábola no plano yz :



3º) No plano xz : faça $y = 0$ na equação $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25}$.

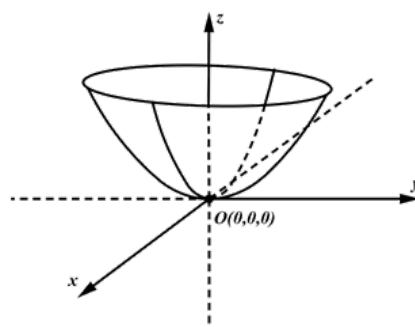
Obtemos $z = \frac{x^2}{4}$ uma parábola no plano xz :



4º) Vamos obter mais uma interseção da superfície com o plano $z = 1$

Obtemos $1 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25}$ uma elipse no plano $z = 1$. Veja a figura a seguir.

O esboço do parabolóide elíptico no espaço tridimensional é



2) PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO

Cada uma das equações

$$Ax^2 + By^2 + Gx = 0$$

$$Ax^2 + Hy + Cz^2 = 0$$

$$Gx + By^2 + Cz^2 = 0$$

representa um **parabolóide hiperbólico** se os coeficientes dos termos de segundo grau tiverem **sinais contrários** e o coeficiente do termo de primeiro grau for **diferente de zero**.

Exemplo 5

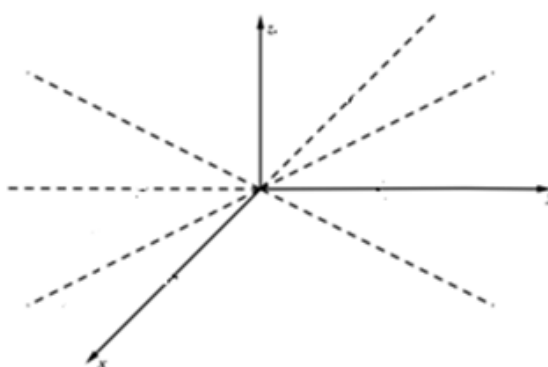
Esboce o parabolóide hiperbólico $z = y^2 - \frac{x^2}{9}$.

Solução:

Vamos analisar as interseções desta superfície com planos coordenados:

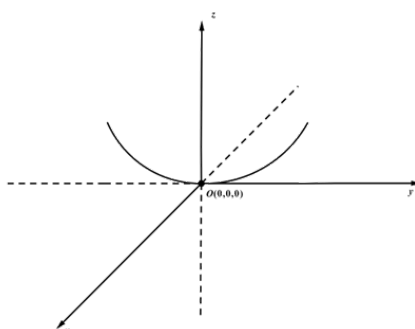
1º) No plano xy : faça $z = 0$ na equação $z = y^2 - \frac{x^2}{9}$.

Obtemos $y^2 = \frac{x^2}{9}$, disso $y = \frac{x}{3}$ ou $y = -\frac{x}{3}$ uma par de retas no plano xy



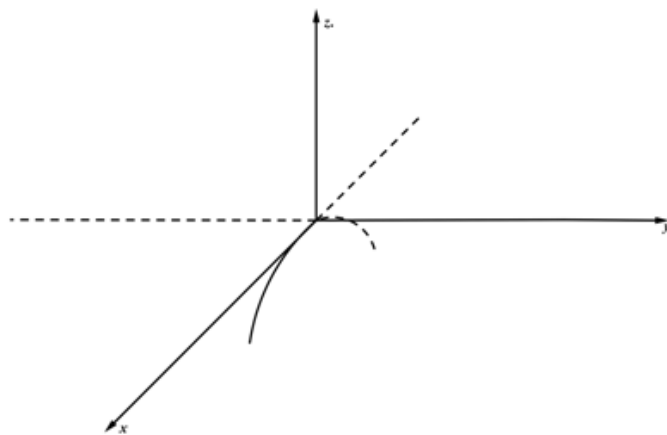
2º) No plano yz : faça $x = 0$ na equação $z = y^2 - \frac{x^2}{9}$.

Obtemos $z = y^2$ uma parábola no plano yz :



3º) No plano xz : faça $y = 0$ na equação $z = y^2 - \frac{x^2}{9}$.

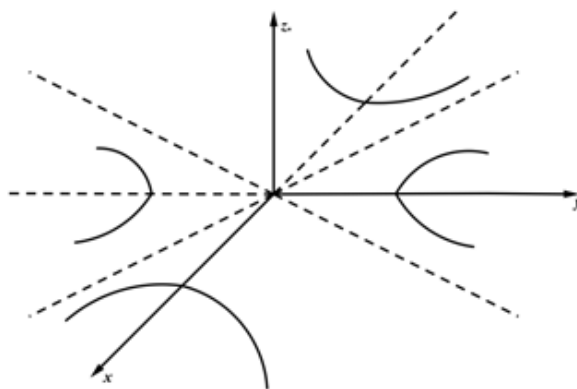
Obtemos $z = -\frac{x^2}{9}$, uma parábola no plano xz :



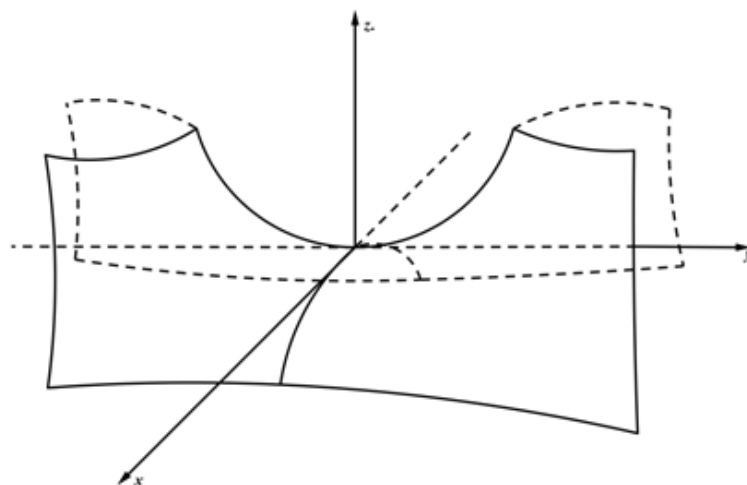
4º) Vamos obter mais uma interseção da superfície com o plano $z = 1$

Obtemos $1 = y^2 - \frac{x^2}{9}$ uma hipérbole no plano $z = 1$.

E fazendo $z = -1$, obtemos outra hipérbole: $1 = \frac{x^2}{9} - y^2$ Veja a figura a seguir.



O esboço do parabolóide elíptico no espaço tridimensional é



III) SUPERFÍCIES CÔNICAS

Uma superfície no espaço tridimensional cuja equação é

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0, \text{ onde } A, B \text{ e } C \text{ são constantes reais,}$$

é denominada **superfície cônica** ou apenas **cone**.

Exemplo 6

Esboce o cone $z^2 = \frac{x^2}{9} + y^2$

Solução:

Vamos analisar as interseções desta superfície com planos coordenados:

1º) No plano xy : faça $z = 0$ na equação $z^2 = \frac{x^2}{9} + y^2$

Obtemos

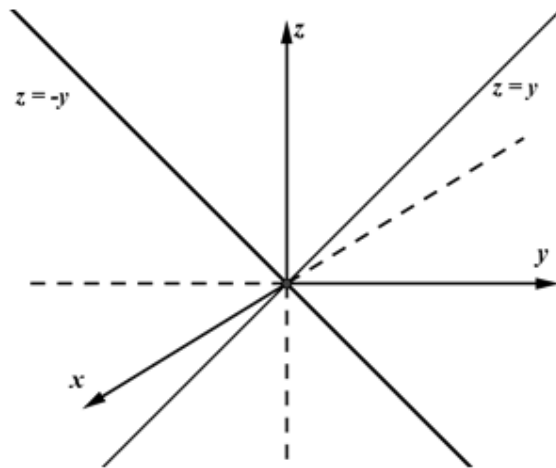
$$\frac{x^2}{9} + y^2 = 0 \text{ e a única solução é } x = y = 0.$$

Disso o ponto $(0,0,0)$ pertence ao cone.

2º) No plano yz : faça $x = 0$ na equação $z^2 = \frac{x^2}{9} + y^2$

$$z^2 = y^2$$

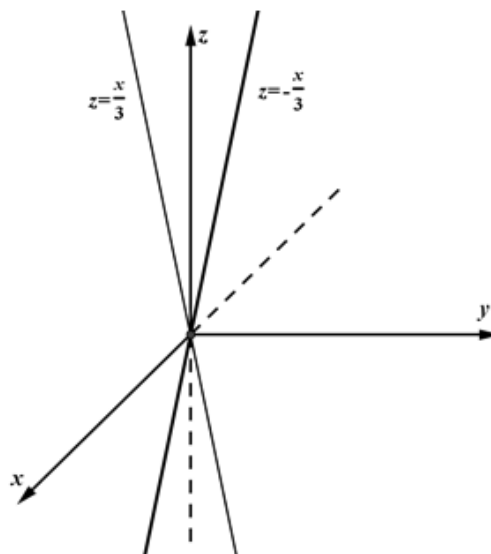
e disso $z = y$ ou $z = -y$ (retas no plano yz).



3º) No plano xz : faça $y = 0$ na equação $z^2 = \frac{x^2}{9} + y^2$

$$z^2 = \frac{x^2}{9}$$

e disso $z = \frac{x}{3}$ e $z = -\frac{x}{3}$ (retas no plano xz).



4º) Vamos obter mais uma interseção da superfície com o plano $z = 4$

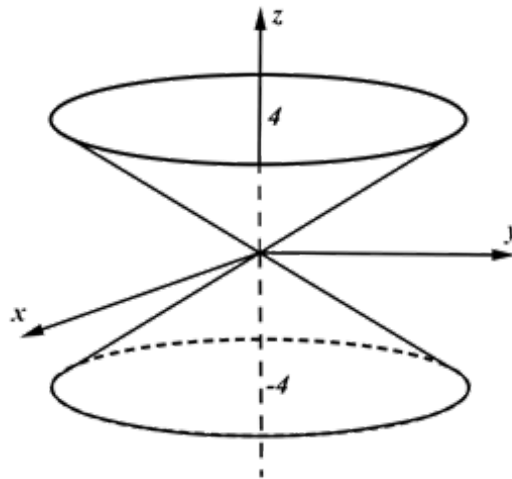
Obtemos $4^2 = \frac{x^2}{9} + y^2$

podemos escrever $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$ (uma *elipse* no plano $z = 4$).

Observe que se $z = -4$ obtemos também

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ (elipse no plano } z = -4\text{).}$$

O esboço do cone no espaço tridimensional é



Atividade I

Esboce cada uma das interseções da superfície cônica com os planos determinadas anteriormente e esboce também a superfície cilíndrica.

IV) OUTRAS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS: CILINDROS

1) CILINDRO ELÍPTICO

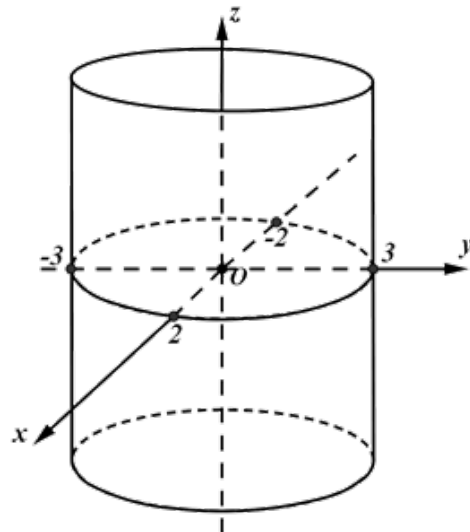
Na equação $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = J$, apenas um dos coeficientes dos termos de 2º grau é igual a zero os outros dois e J tem o mesmo sinal.

Exemplo 7

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Observe que z é independente de x e y , pois não aparece na equação e na aula 03 você estudou elipses e agora sabe que $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ no plano representa uma elipse.

Como z não aparece na equação, isto significa que para qualquer plano $z = k$ paralelo ao plano xy o traço da superfície nesse plano é a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.



Atividade II

Faça um esboço do cilindro elíptico $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.

2) CILINDRO PARABÓLICO

Em uma das equações

$$Ax^2 + By^2 + Gx = 0$$

$$Ax^2 + Hy + Cz^2 = 0$$

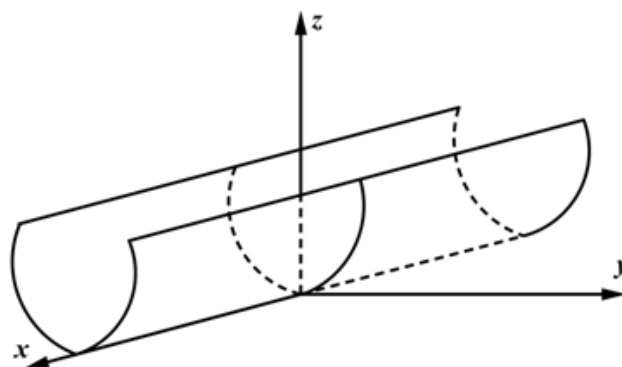
$$Gx + By^2 + Cz^2 = 0$$

apenas um dos coeficientes dos termos de 2º grau é igual a zero e os outros dois coeficientes são não nulos.

Exemplo 8

$$y = 2z^2$$

Na aula 02 você estudou parábolas e sabe que a equação $y = 2z^2$ no plano representa uma parábola. Neste caso, observamos que a variável x é independente de z e y , pois não aparece na equação e isto significa que para qualquer plano $x = k$ paralelo ao plano yz o traço da superfície nesse plano é a parábola $y = 2z^2$. Obtemos a superfície



3) CILINDRO HIPERBÓLICO

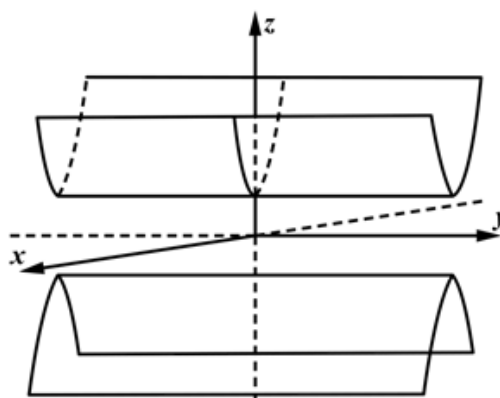
Na equação $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = J$, apenas um dos coeficientes dos termos de 2º grau é igual a zero os outros dois têm sinais diferentes.

Exemplo 9

$$\frac{z^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$$

Observe que y é independente de x e z , pois não aparece na equação e na aula 04 você estudou hipérboles e agora sabe que $\frac{z^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$ no plano representa uma hipérbole.

Como y não aparece na equação, isto significa que para qualquer plano $y = k$ paralelo ao plano xz o traço da superfície nesse plano é a hipérbole $\frac{z^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$.



Superfície Esférica

Dado um ponto $C(x_0, y_0, z_0)$ pertencente ao espaço tridimensional e um número real $r > 0$, a superfície esférica (esfera) de centro C é igual a r é o conjunto de pontos P do espaço cuja distância ao ponto C é igual a r . Assim, se $P(x, y, z)$ pertence à esfera de centro $C(x_0, y_0, z_0)$ e raio $r > 0$ se e somente se

$$d(P, C) = r$$

ou seja,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

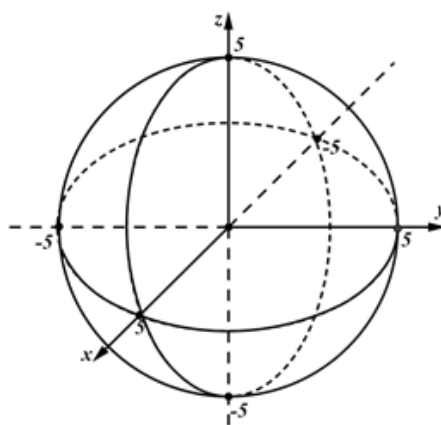
e esta é denominada **equação reduzida da esfera**.

Exemplo 10

Qual a equação da esfera com centro na origem $O(0,0,0)$ e raio 5?

A equação desta esfera é $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = 5^2$ ou podemos escrever:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5^2$$



Observe que as interseções da esfera com os planos coordenados xy , yz e xz são circunferências de raio 5 e centro na origem do sistema de coordenadas.

Qual é o centro e o raio da esfera $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$?

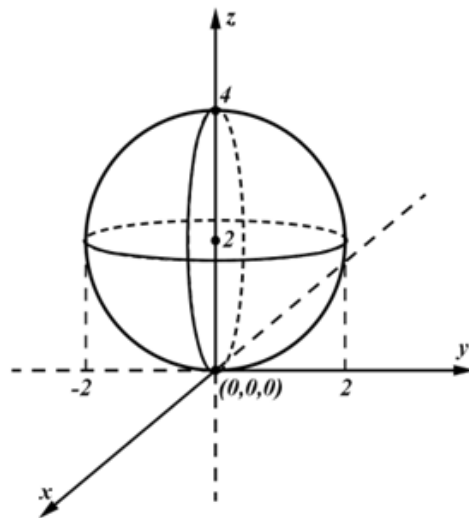
Solução:

Comparando com a equação reduzida

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

temos $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 2$ e $r^2 = 4$,

e disso o centro é o ponto $C(0, 0, 2)$ e o raio é $r = 2$. Veja um esboço dessa esfera:



Atividade III

Esboce as esferas:

- a) $x^2 + y^2 + z^2 = 5^2$
- b) $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$

Lista de Exercícios

1) Determine o centro e o raio da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e esboce o seu gráfico. Indique no gráfico a circunferência obtida pela interseção do plano $z = 2$ com essa esfera.

2) Qual é a equação da esfera com centro $C(0, 6, 0)$ e raio 3. Esboce essa esfera.

3) Identifique a quádrica e esboce o seu gráfico:

a) $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$

b) $-x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$

c) $\frac{x^2}{36} - 9y^2 - 4z^2 = 9$

d) $y = x^2 + 4z^2$ (indique no gráfico a elipse obtida pela interseção do plano $y = 4$ com esse parabolóide elíptico).

e) $y = \frac{z^2}{4} - x^2$

4) Identifique e esboce os cilindros:

a) $x^2 + y^2 = 1$

b) $y^2 + z^2 = 1$

c) $y^2 + \frac{x^2}{2} = 1$

d) $z = y^2$

e) $z = y^2 + 4$

Referências Bibliográficas

DIAS, Cláudio Carlos; DANTAS, Neuza Maria. **Geometria analítica e números complexos**. Natal, RN: EDUFRN, 2006.

EVES, Howard; **Introdução à história da matemática**; tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora UNICAMP, 2004.

KLÉTÉNIC. **Problemas de Geometria Analítica**. Livraria Cultura Brasileira. Belo Horizonte, 1984.

REIS, G.L. ; SILVA, V.V. **Geometria Analítica**. 2º edição. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Geometria Analítica**. 2º edição. São Paulo, SP: Pearson Education do Brasil, 1987.

VENTURI, Jacir J. **Cônicas**. 6ª edição. Curitiba, PR: Editora UFPR, 1992.