série conhecimento
Edição nº 43. 2023 • ISSN 2179-1732

Metrologia & Instrumentação:
Metrologia e Incerteza de Medição

Álvaro Messias Bigonha Tibiriçá
Alexandre Martins Reis

43
cead UFV

Reitor: Demetrius David da Silva
Vice-Reitora: Rejane Nascentes

Diretor: Francisco de Assis de C. Pinto

Campus Universitário, s/n. - Viçosa/MG.
CEP: 36570-900 - Telefone: (31) 3612 1251
e-mail: *serie.conhecimento@ufv.br*

A **Série Conhecimento** é uma publicação seriada e on-line, editada pela Coordenadoria de Educação Aberta e a Distância, por tempo indeterminado e de forma independente, tratando de assuntos e temas variados, com o objetivo de constituir material de apoio a disciplinas do ensino médio, dos cursos técnicos, dos cursos de graduação e dos programas de pós-graduação lato sensu e stricto sensu, nas modalidades presencial e a distância, da Universidade Federal de Viçosa (UFV).

Conselho Editorial: Donizete Aparecido Batista; Eduardo França Castro; Esther Giacomini Silva; Francisco de Assis de Carvalho Pinto; João Paulo Viana Leite; Renata Cassia Campos; Vinicius Catão De Assis Souza

Autores: Álvaro Messias Bigonha Tibiriçá e Alexandre Martins Reis
Identidade Visual e diagramação: Pedro Eni Lourenço Rodrigues
Foto Capa: *Lifestylememory on Freepik.com*
Revisão linguística:

Ficha catalográfica elaborada pela Seção de Catalogação e Classificação da Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa – Campus Viçosa

T553m
2023

Tibiriçá, Álvaro Messias Bigonha, 1978-
Metrologia e Instrumentação [recurso eletrônico]: metrologia e incerteza de medição / Álvaro Messias Bigonha Tibiriçá, Alexandre Martins Reis -- Viçosa, MG: UFV, CEAD, 2023.
1 apostila eletrônico (43 p.): il. color. -- (Conhecimento; ISSN 2179-1732; n. 43)
Disponível em: https://serieconhecimento.cead.ufv.br/
Bibliografia: p. 43.
1. Metrologia. 2. Medição. 3. Modelos matemáticos. I. Reis, Alexandre Martins, 1973-. II. Universidade Federal de Viçosa. Coordenadoria de Educação Aberta e à Distância. III. Título. IV. Série.

CDD 22. ed. 620.0044

Bibliotecária responsável: Alice Regina Pinto Pires - CRB-6/2523

Responsabilidade legal pelo conteúdo, direitos autorais e incentivo à reprodução
Todo o conteúdo dos textos submetidos e publicados na Série Conhecimento é de inteira responsabilidade de seus autores, não cabendo à Série responder por qualquer implicação legal.
Como todo o conteúdo publicado pela Revista é de acesso público e gratuito, tendo como finalidades o debate e a divulgação ampla do conhecimento, é permitida e incentivada sua reprodução com fins exclusivamente educacionais, culturais, científicos e não-comerciais, desde que citados seus autores com a referência bibliográfica completa da publicação na Série Conhecimento.

Este obra está licenciado com uma Licença
Creative Commons Atribuição Não Comercial Compartilha Igual 4.0 Internacional.

Prefácio

Este trabalho é o primeiro de uma série a ser lançado pelos autores relacionado ao tema Metrologia & Instrumentação. Este tema está ligado a ciência e aos sistemas de medição. Na graduação de Engenharia Mecânica da UFV, estes temas relacionam-se diretamente à disciplina Metrologia e à disciplina Práticas de Instrumentação, ministradas atualmente e respectivamente pelos professores Alexandre M. Reis e Álvaro M. B. Tibiriçá.

Este primeiro título "Metrologia & Instrumentação: Metrologia e Incerteza de Medição" foi baseado num texto inicial escrito pelo prof. Álvaro a partir das notas de aula preparadas por ele durante os anos em que ministrou a disciplina Metrologia para graduação antes de se tornar professor da UFV, e foi complementado e revisado pelo prof. Alexandre M. Reis, professor da mesma disciplina na UFV desde 2008.

Este trabalho foi baseado, principalmente, na terceira edição do Guia para a Expressão da Incerteza de Medição publicado pelo INMETRO em agosto 2003 (ABNT, 2003) e no Vocabulário Internacional de Metrologia – Conceitos Fundamentais e Gerais e Termos Associados (INMETRO, 2012). Os autores esperam que este texto seja uma ferramenta de consulta para os que buscam compreender o processo de relatar medições e estimar suas incertezas.

Sobre os autores

Alexandre Martins Reis - É graduado (1998) em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal de Uberlândia (UFU). Possui mestrado (2000) e doutorado (2004) em Engenharia Mecânica, com ênfase em Materiais e Processos de fabricação, também pela Universidade Federal de Uberlândia (UFU). Atualmente, é professor da Universidade Federal de Viçosa (UFV), onde coordena o Laboratório de Metrologia do Departamento de Engenharia de Produção e Mecânica (DEP) e leciona, desde 2007, disciplinas nas áreas de materiais, processos de fabricação e metrologia.

Álvaro M. Bigonha Tibiriçá - É graduado (2001) em Engenharia Mecânica, com ênfase em Mecatrônica e em Computação, pela Universidade de São Paulo (EESC/USP). Possui mestrado (2004) e doutorado (2008) em Engenharia Mecânica também pela Universidade de São Paulo (EESC/USP). Lecionou para cursos de engenharia disciplinas relacionadas à Metrologia entre 2004 e 2009. É professor da Universidade Federal de Viçosa (UFV) no Departamento de Engenharia de Produção e Mecânica, desde 2009, onde leciona disciplinas nas áreas de Instrumentação, de Modelagem & Controle de Sistemas e de Ar Condicionado & Refrigeração.

Sumário

1. Medição e o Sistema Metrológico Internacional

Objetivos de aprendizagem: Apresentar os conceitos: de medição, de erro e de incerteza. Trabalhar o significado dos termos metrológicos mais comuns. Discutir o funcionamento do Sistema Metrológico Internacional. Discutir o conceito de Calibração e o que é um Certificado de Calibração.

No mundo moderno a **medição**[1] está em toda parte. A todo instante é possível notar que algo foi, está sendo ou será medido. A velocidade de um ciclista, a massa de uma pessoa medida na balança da farmácia, o tempo gasto para um carro de Fórmula 1 completar uma volta, a quantidade de energia elétrica e de água consumidas impressas na conta de luz e de água, o volume de combustível no abastecimento do carro, o volume de refrigerante na garrafa, entre outras, são algumas das medidas que fazem parte do cotidiano moderno. Há também as medidas que não se vê diretamente, mas são necessárias na fabricação de produtos consumidos diariamente: o diâmetro do eixo da caixa de câmbio do carro, a rugosidade superficial da biela do motor de combustão, a temperatura do forno da padaria, a vazão de água bombeada pela estação de tratamento de água da cidade, a massa dos ingredientes do pão, entre outros.

A indústria atual não existiria se não houvesse métodos de medição adequados. Como é possível garantir que uma peça fabricada na China poderá ser montada com uma peça fabricada no Brasil ou nos Estados Unidos? Sem um sistema metrológico universal e sem a padronização de procedimentos seria inimaginável essa situação. Sem uma base comum, as medidas feitas em diferentes lugares seriam de difícil entendimento em outro lugar, tornando complicado o intercâmbio de produtos, matéria prima, peças, entre outros. O que torna possível a organização dos sistemas de medição é a existência de uma cadeia hierárquica de laboratórios que propagam padrões, métodos e procedimentos de medição definidos por um Comitê Internacional de Pesos e Medidas (CIPM). É por meio do CIPM que são definidas as **grandezas**[2] **de base**[3] e as **unidades de medida**[4] usadas universalmente.

No topo da cadeia hierárquica de laboratórios de **metrologia**[5] está o Bureau Internacional de Pesos e Medidas (BIPM), sediado na França. É o BIPM o responsável por

---

1. **Medição.** Processo de obtenção experimental dum ou mais valores que podem ser, razoavelmente, atribuídos a uma grandeza (definição 2.1 do VIM – 2012).

2. **Grandeza.** Propriedade dum fenômeno, dum corpo ou duma substância, que pode ser expressa quantitativamente sob a forma dum número e duma referência (definição 1.1 do VIM – 2012).

3. **Grandeza de base.** Grandeza dum subconjunto escolhido, por convenção, de um dado sistema de grandezas, no qual nenhuma grandeza do subconjunto possa ser expressa em função das outras (definição 1.4 do VIM – 2012).

4. **Unidades de medida.** Grandeza escalar real, definida e adotada por convenção, com a qual qualquer outra grandeza da mesma natureza pode ser comparada para expressar, na forma dum número, a razão entre as duas grandezas (definição 1.9 do VIM – 2012).

5. **Metrologia.** Ciência da medição e suas aplicações (definição 2.2 do VIM – 2012).

manter **padrões[6] de referência[7] internacionais[8]** definidos pelo CIPM para diversas grandezas. A partir do BIPM, laboratórios nacionais, como os do Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (Inmetro) no Brasil, fazem a **calibração[9]** de **padrões nacionais[10]**. Uma rede de laboratórios credenciados pelo laboratório nacional, como a Rede Brasileira de Calibração (RBC), propaga os padrões nacionais através de padrões de referência de laboratório de calibração. Os instrumentos de uso diário são calibrados pelos laboratórios da rede credenciada.

Além de um sistema de unidades coerente, é importante também a utilização de procedimentos que tornem possível a comparação da qualidade de medidas feitas em ocasiões diferentes. Como nenhuma medição é perfeita, isto é, isenta de erros, não é possível determinar exatamente o valor do **mensurando[11],** grandeza específica que se pretende medir. Há sempre uma dispersão de valores em torno de um valor central que é atribuído ao mensurando, a **incerteza de medição[12].** A estimativa da incerteza de medição é baseada em procedimentos estatísticos utilizados para modelar e combinar diferentes fontes de incerteza (dúvida) que compõem um processo de medição.

Para universalizar a forma de expressar a incerteza de medição, o BIPM elaborou um Guia para Expressão da Incerteza de Medição, o ISO-GUM (*Guide of expression of Uncertainty Measurement* publicado pela *International Organization for Standardization*). Este guia foi fruto de consenso de especialistas de laboratórios nacionais de metrologia em um trabalho que começou em 1977 e foi ratificado em 1986. Assim como o uso quase universal do Sistema Internacional de Unidades (SI) trouxe coerência às medições científicas e tecnológicas, o consenso na avaliação e na expressão da incerteza da medição permite que os **resultados de medição[13]** obtidos em diferentes áreas do conhecimento e locais sejam prontamente compreendidos e apropriadamente interpretados. O tratamento sobre incertezas feito ao longo deste texto é baseado no ISO-GUM.

1.1. Conceitos Fundamentais da Medição

O conceito de medição engloba o conjunto de operações que tem por objetivo determinar o valor de uma grandeza. São exemplos de medição a determinação da massa dos pães em uma padaria, da altura de um edifício, da rugosidade de uma peça, da tem-

---

6. **Padrão.** Realização da definição duma dada grandeza, com um valor determinado e uma incerteza de medição associada, utilizada como referência (definição 5.1 do VIM – 2012).

7. **Padrão de referência.** Padrão de medição estabelecido para a calibração de outros padrões de grandezas da mesma natureza numa dada organização ou num dado local (definição 5.1 do VIM – 2012).

8. **Padrão internacional.** Padrão de medição reconhecido pelos signatários de um acordo internacional, tendo como propósito a sua utilização mundial (definição 5.2 do VIM – 2012).

9. **Calibração.** Operação que estabelece, sob condições especificadas, numa primeira etapa, uma relação entre os valores e as incertezas de medição fornecidos por padrões e as indicações correspondentes com as incertezas associadas; numa segunda etapa, utiliza esta informação para estabelecer uma relação visando à obtenção dum resultado de medição a partir duma indicação (definição 2.39 do VIM – 2012).

10. **Padrão Nacional.** Padrão de medição reconhecido por uma entidade nacional para servir dentro dum estado ou economia, como base para atribuir valores a outros padrões de medição de grandezas da mesma natureza (definição 5.3 do VIM – 2012).

11. **Mesurando.** Grandeza que se pretende medir (definição 2.3 do VIM – 2012).

12. **Incerteza de medição**. Parâmetro não negativo que caracteriza a dispersão dos valores atribuídos a um mensurando, com base nas informações utilizadas (definição 2.26 do VIM – 2012).

13. **Resultado de medição.** Conjunto de valores atribuídos a um mensurando, juntamente com toda outra informação pertinente disponível (definição 2.9 do VIM – 2012).

peratura do processador do computador, da velocidade de cruzeiro de um avião, entre outros. Em qualquer uma dessas medições, o valor atribuído ao mensurando é fruto da comparação entre o mensurando e um padrão. Este último é uma referência que pode ser:

- **Medida materializada**[14], como blocos padrões;
- **Instrumento de medição**[15], como uma balança;
- **Material de referência**[16], como água pura no estado de ponto triplo;
- **Sistema de medição**[17] capaz de reproduzir uma unidade de medição.

Qualquer padrão possui incerteza, isto é, há dúvida atrelada ao valor atribuído a ele. Por este motivo, o padrão utilizado em uma medição deve ser escolhido de modo que sua incerteza seja pequena o suficiente para não influenciar de forma contundente a incerteza de medição. Como regra geral, costuma-se escolher um padrão com incerteza em torno de 10% da incerteza esperada para a medida. Vale ressaltar que esse parâmetro deve ser analisado caso a caso, buscando-se o equilíbrio entre incerteza e custo. O padrão escolhido para determinada medição é chamado também de Valor Verdadeiro Convencional (VVC), isto é, um valor com incerteza apropriada para determinada finalidade cujo valor é considerado verdadeiro (confiável).

Medir é um procedimento experimental pelo qual o valor do mensurando é determinado como um múltiplo ou submúltiplo de uma unidade, estabelecida por um padrão, e reconhecida internacionalmente. Isto significa que a medida deve possuir **rastreabilidade**[18]**.** O mecanismo de rastreamento da medição consiste em relacionar o valor encontrado para o mensurando com um padrão de referência internacional mantido pelo BIPM. Este relacionamento só é possível através da cadeia hierárquica dos laboratórios que propagam o padrão de referência internacional, por meio de uma série de calibrações até o sistema de medição utilizado para fazer determinada medida.

Além de fontes de incerteza inerentes a cada medição, o próprio sistema de rastreamento introduz incerteza na medição. O padrão do metro no BIPM, por exemplo, possui, atualmente, incerteza da ordem 10^{-12} m. Cada padrão de referência na cadeia metrológica carrega consigo as incertezas do padrão usado na sua calibração. Desse modo, o padrão de referência nacional mantido pelo Inmetro para o metro possuirá no mínimo uma incerteza de 10^{-12} m. E os demais padrões de referência que compõem a cadeia metrológica possuirão incertezas cada vez maiores.

---

14. **Medida materializada.** Instrumento de medição que reproduz ou fornece, de maneira permanente durante sua utilização, grandezas duma ou mais naturezas, cada uma com um valor designado (definição 3.6 do VIM – 2012).

15. **Instrumento de medição.** Dispositivo utilizado para realizar medições, individualmente ou associado a um ou mais dispositivos suplementares (definição 3.1 do VIM – 2012).

16. **Material de referência.** Material, suficientemente homogêneo e estável em relação a propriedades específicas, preparado para se adequar a uma utilização pretendida numa medição ou num exame de propriedades qualitativas (definição 5.13 do VIM – 2012).

17. **Sistema de medição.** Conjunto dum ou mais instrumentos de medição e frequentemente outros dispositivos, compreendendo, se necessário, reagente e insumos, montado e adaptado para fornecer informações destinadas à obtenção dos valores medidos, dentro de intervalos especificados para grandezas de naturezas especificadas (definição 5.13 do VIM – 2012).

18. **Rastreabilidade.** Propriedade dum resultado de medição pela qual tal resultado pode ser relacionado a uma referência através duma cadeia ininterrupta e documentada de calibrações, cada uma contribuindo para a incerteza de medição (definição 2.41 do VIM – 2012).

1.2. O Processo de Medição

O objetivo da medição é determinar o Resultado de Medição, isto é, atribuir um valor ao mensurando acompanhado das incertezas atreladas ao **processo de medição**[19]**.** No processo de medição há cinco fatores que influenciam diretamente o Resultado de Medição em maior ou menor grau (Figura 1). Esses fatores estão descritos a seguir.

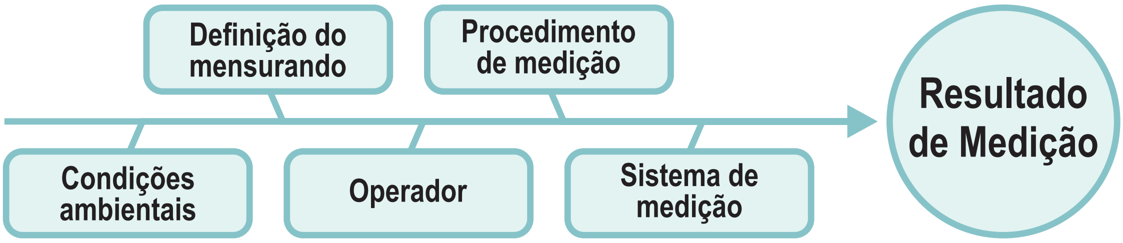


Figura 1 - Elementos do processo de Medição

Uma **definição do mensurando** imprecisa produz incertezas relacionadas a diferença entre o que se quer medir, o que realmente é medido, e o que é relatado. A velocidade de um fluido que escoa em uma tubulação pode ser a velocidade média em um ponto específico da tubulação, pode ser a velocidade máxima em outro ponto da tubulação, ou ainda um número infinito de outras situações. É importante definir o mensurando com completeza, relacionando as condições e especificidades do que se quer medir e da situação de medição. Como regra geral para definição do mensurando, deve-se buscar sanar qualquer dúvida que possa acarretar em interpretação incorreta do que realmente foi medido.

O **procedimento de medição**[20] é outro fator do processo de medição que influencia o Resultado de Medição. Procedimentos de medição diferentes implicam em incertezas, dificuldades de medição e custos diferentes. Não são raras as situações nas quais são inexistentes procedimentos formais de medição. A documentação do procedimento de medição possibilita que medições possam ser repetidas em condições idênticas ou similares, por diferentes operadores e em diferentes momentos. Tanto o **princípio de medição**[21] como o **método de medição**[22] são parte do procedimento de medição. Os métodos de medição se dividem em duas grandes classes:

- **Métodos de medição diretos:** Nesta classe de métodos, o Resultado de Medição é determinado pela aplicação direta de um instrumento de medição ao mensurando. São exemplos: a medição de um comprimento com uma régua, a medição de uma massa com uma balança, a medição de uma temperatura com termômetro, entre outros.
- **Métodos de medição indiretos:** Nesta classe de métodos, o Resultado de Medição é determinado pela comparação do mensurando com um valor (padrão) conheci-

19. **Processo de Medição.** Conjunto de métodos e meios que são utilizados para efetuar uma medição (Albertazzi e de Souza, 2008).

20. **Procedimento de medição.** Descrição detalhada duma medição de acordo com um ou mais princípios de medição e com um dado método de medição, baseada num modelo de medição e incluindo todo cálculo destinado à obtenção dum resultado de medição (definição 2.6 do VIM – 2012).

21. **Princípio de medição.** Fenômeno que serve como base para uma medição (definição 2.4 do VIM – 2012).

22. **Método de medição.** Descrição genérica duma organização lógica de operações utilizadas na realização duma medição (definição 2.5 do VIM – 2012).

do. Exemplo: medição de volume com um recipiente de volume conhecido; medição de uma massa por comparação com massas com valor conhecido utilizando uma balança de pratos, entre outros.

As **condições ambientais** como temperatura, umidade, vibração, entre outras afetam principalmente o sistema de medição e, consequentemente, o Resultado de Medição. Quanto maior o grau de precisão requerido ao sistema de medição mais susceptível às condições ambientais estará a medição. É o que pode ser observado, por exemplo, quando uma balança de cozinha é comparada com uma balança de laboratório. Os resultados obtidos por esta última podem ser afetados pelo empuxo do ar e pelas pequenas variações de pressão atmosférica e de temperatura. Já os resultados obtidos pela balança de cozinha praticamente não sentirão os efeitos provocados por tais condições ambientais.

O **operador** é o responsável por manipular o sistema de medição. Habilidades do operador como a destreza, o conhecimento do sistema de medição, a observação de procedimentos de medição e a capacidade de avaliação das condições de medição influenciam o Resultado de Medição. Entre os fatores de variabilidade dos resultados de medição, obtidos por operadores distintos, está a interpretação da leitura da medição. A escolha de sistemas de medição mais automatizados, com dispositivos mostradores digitais, ao invés de analógicos, que dependem menos da habilidade ou destreza do operador, diminuem esse tipo de variabilidade. Outro fator que contribui para diminuir esta variabilidade é o treinamento dos operadores para utilização do sistema de medição e para execução dos procedimentos de medição.

Qualquer **sistema de medição** por motivos construtivos e de funcionamento gera incertezas. Tanto a construção como o funcionamento desses sistemas ocasionam variabilidades inerentes aos sistemas reais, o que torna qualquer medida inexata. Quanto melhor a qualidade do sistema de medição mais preciso é o Resultado de Medição, ou seja, menor são as incertezas de medição. No entanto, sistemas de medição mais precisos possuem custo maior. Um ponto de equilibro entre custo e incerteza aceitável deve ser buscado.

1.3. Erro de Medição

O conjunto de fatores que compõe o processo de medição determinam a indicação que é observada no sistema de medição e os **erros de medição**[23]**.** O Resultado de Medição é fruto dessa combinação. Entender os erros inerentes ao processo de medição colabora para determinar o Resultado de Medição e entender melhor o processo de medição. É importante ressaltar aqui a diferença entre erro e incerteza. Enquanto o erro relaciona-se a diferença entre o valor indicado e o valor exato do mensurando, a incerteza relaciona-se a dúvida. Ela é um parâmetro associado ao resultado de uma medição e é caracterizada por uma faixa de valores relacionada a um grau de confiança estatístico dentro da qual estaria contido o valor verdadeiro do mensurando.

Note que para determinar o erro é necessário saber o valor exato do mensurando, o que não é conhecido. Na maioria das vezes, o valor do mensurando é o que se pretende encontrar. Como não é possível saber o valor exato do mensurando é impraticável calcular

23. **Erro de medição.** Diferença entre valor medido duma grandeza e um valor de referência (definição 2.16 VIM – 2012).

o erro de cada medida. No entanto, o erro de medição pode ser divido em três parcelas das quais as duas primeiras podem ser estimadas e a última pode ser desprezada em medições realizadas com cuidado:

- **Erro sistemático**[24]**.** É a parcela de erro sempre presente nas medições realizadas em idênticas condições de operação. Um dispositivo mostrador com ponteiro "torto" é um exemplo clássico de um erro sistemático. Pode ser causado por problemas de ajuste, desgaste, fatores construtivos, método empregado ou ainda por fatores externos. Uma estimativa para o erro sistemático de um sistema de medição pode ser feita medindo-se um padrão (com valor conhecido) algumas vezes e calculando-se a diferença entre a média das medições e o valor do padrão. Essa diferença é chamada de **tendência**[25]**.**
- **Erro aleatório**[26]**.** É a parcela de erro que desvia cada medição de um valor médio de medições realizadas em idênticas condições de operação. Pode ser causado pela existência de folgas, atrito, vibrações, flutuações de tensão elétrica, instabilidades internas, variações das condições ambientais, entre outras. Seu valor em cada medição é imprevisível (aleatório). No entanto, uma estimativa estatística pode ser feita através de indicadores de dispersão obtidos a partir de um conjunto de medições.
- **Erro grosseiro.** É a parcela de erro decorrente do mau uso ou mau funcionamento do sistema de medição. Pode ser causado por danos no sistema de medição, leitura equivocada, arredondamento mal feito, entre outros. O erro grosseiro é imprevisível e por isso não pode ser estimado. No entanto, ele pode ser evitado facilmente através do uso e manutenção adequados do sistema de medição.

1.4. Calibração

Quando se realiza uma medição, uma das primeiras perguntas a ser respondida é a seguinte: qual é o nível de confiança dos resultados apresentados no mostrador do sistema de medição? A resposta para essa pergunta pode ser encontrada no certificado (ou carta) de calibração, que, por sua vez, é obtido por meio de um procedimento de **calibração**[27]. Em outras palavras, por meio da calibração, é possível estabelecer, para determinadas condições, a relação entre os valores indicados por um instrumento de medição e os valores correspondentes das grandezas estabelecidas por padrões.

De uma forma mais simples pode-se entender a calibração como um processo de aferição. Um processo de Calibração bem-sucedido, passa pela escolha adequada do padrão de medida a ser utilizado, seja ele uma medida materializada ou um sistema de medição padrão, o que repercutirá, na qualidade e no resultado final das medições. Desta forma, padrões de melhor qualidade, com menores incertezas de medição, geram melhores condições para a realização da calibração e contribuem para que este processo produza resultados mais confiáveis.

---

24. **Erro sistemático.** Componente do erro de medição que, em medições repetidas, permanece constante ou varia de maneira previsível (definição 2.17 do VIM – 2012).

25. **Tendência.** Estimativa de um erro sistemático (definição 2.18 do VIM – 2012).

26. **Erro aleatório.** Componente do erro de medição que, em medições repetidas, varia de maneira imprevisível (definição 2.19 do VIM – 2012).

27. **Calibração.** Operação que estabelece, sob condições especificadas, numa primeira etapa, uma relação entre os **valores** e as **incertezas de medição** fornecidos por **padrões** e as **indicações** correspondentes com as incertezas associadas; numa segunda etapa, utiliza esta informação para estabelecer uma relação visando a obtenção dum **resultado de medição** a partir duma indicação (definição 2.16 VIM – 2012).

A calibração é um componente importante na qualidade do processo produtivo das empresas. Ela deve ser incorporada às rotinas e aos procedimentos padrões de produção, visando reduzir a variação das especificações técnicas dos produtos. O que os torna mais uniformes e aumenta a qualidade e a competitividade dos mesmos no mercado. Reduz também defeitos, através da diminuição de perdas pela detecção imediata de eventuais problemas gerados na produção. Como instrumentos calibrados geram resultados confiáveis, o índice de acerto nas tomadas de decisões se torna maior. Desta forma, o desperdício e a produção de rejeitos são diminuídos.

Uma empresa que busca atingir o padrão máximo em termos de controle de qualidade dos seus produtos e processos, deveria ter todos os seus instrumentos de medição calibrados periodicamente com elevada frequência. Contudo, para maioria das empresas isto seria impraticável, principalmente por questões de custo. Nestas situações, acaba-se estabelecendo um sistema de priorização com identificação, dentro da empresa, dos instrumentos que devem ser calibrados com maior frequência. Normalmente, esta priorização é feita considerando-se quais são as variáveis dos processos e/ou dimensões que afetam a qualidade dos produtos. Em seguida, identifica-se os instrumentos utilizados para medir estas variáveis e/ou dimensões. É um exemplo a priorização dos termopares instalados na câmara interna de um forno de pré-aquecimento de barras metálicas submetidas a um processo de laminação à quente. Nesta aplicação, uma pequena variação da temperatura nesta câmara é suficiente para alterar de forma significativa as propriedades do produto laminado, o que justifica a priorização de calibração desses termopares.

Basicamente há dois tipos de calibração: a Direta e a Indireta. Na **Calibração Direta** o padrão é medido diretamente pelo Sistema de Medição a Calibrar (SMC), e a indicação obtida (I_{SMC}) é comparada com os valores do padrão (VVC) (Figura 2).

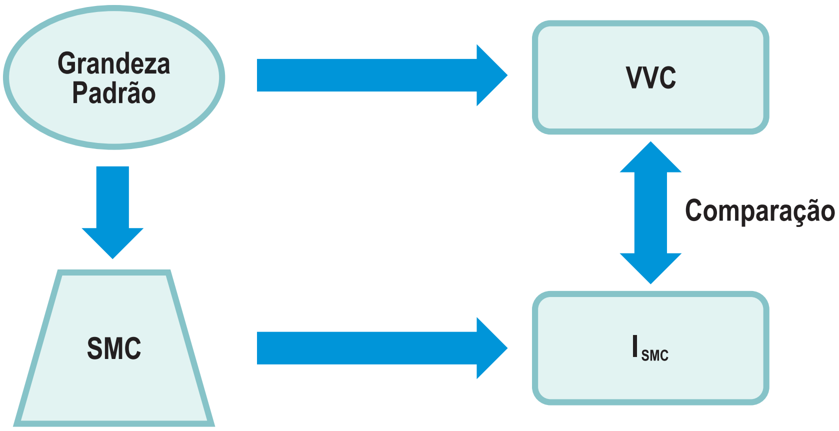


Figura 2 – Calibração Direta.

Um exemplo clássico de Calibração Direta é quando uma balança é calibrada usando um conjunto de massas-padrão com valores que cobrem toda a **faixa de medição**[28] da balança (Figura 3). Nesse caso, seguindo um procedimento pré-definido, as massas-padrão são medidas diretamente pela balança que está sendo calibrada, e devem ter uma incerteza, pelo menos, dez vezes menor que a da balança. Após as medições, as correções e as incertezas-padrão, para a balança, são calculadas utilizando os valores medidos e os valores das massas-padrão. Estes últimos são tomados como Valor Verdadeiro Convencional (VVC).

28. **Faixa de medição.** É o conjunto de valores do mensurando para o qual o sistema de medição foi desenhado para operar. É estabelecida pelo seu fabricante (Albertazzi e de Souza, 2008).

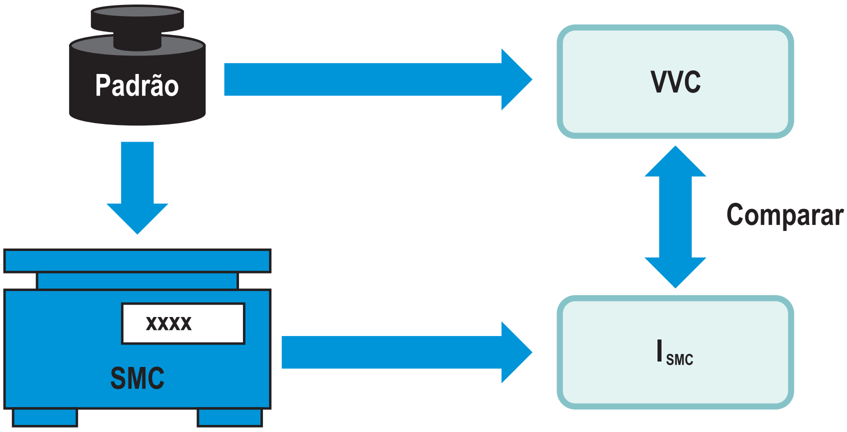


Figura 3 – Exemplo de Calibração Direta (Balança).

Na **Calibração Indireta**, ao invés de usar uma grandeza padrão, é usado um sistema de medição padrão. Aqui a grandeza a ser medida, que pode ser uma medida materializada ou uma grandeza gerada por um sistema auxiliar (gerador de grandeza), é mensurada pelo sistema a calibrar e pelo sistema padrão. É importante destacar que as incertezas do sistema de medição padrão devem ser, pelo menos, dez vezes menores que a do sistema a calibrar. Após as medições, as correções e as incertezas-padrão, para o sistema a calibrar, são calculadas utilizando os valores medidos por ele e as indicações do sistema de medição padrão, que são tomadas como Valor Verdadeiro Convencional (VVC).

Como exemplo, na Figura 4, observa-se um esquema da calibração indireta de uma balança. Uma massa (mensurando), não necessariamente conhecida, é medida pela balança a calibrar e pela balança padrão. As indicações das duas balanças, I_{SMC} e I_{SMP} (Indicação do Sistema de Medicação Padrão), são comparadas, e as correções e incertezas da balança a calibrar são calculadas.

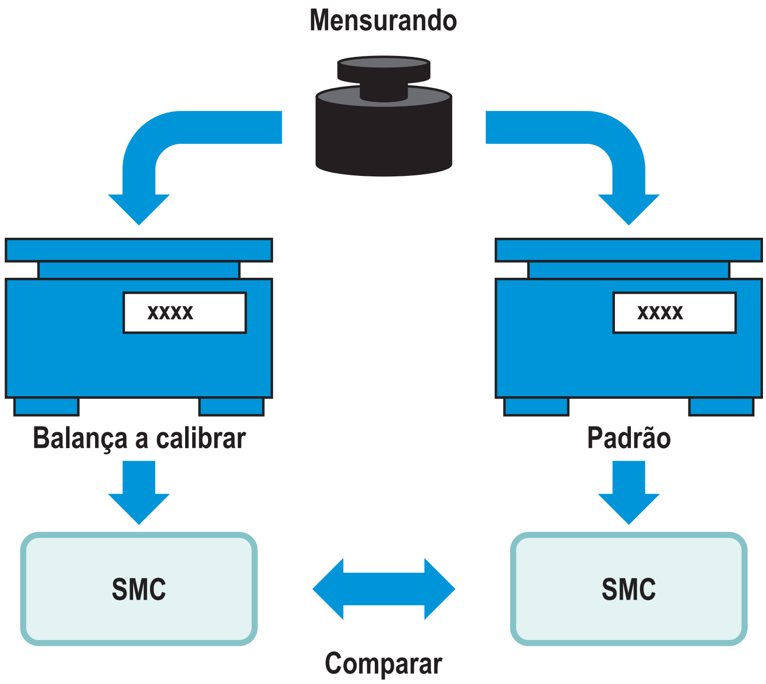


Figura 4 – Exemplo de Calibração Indireta (Balança)

Algumas grandezas, tais como, pressão, velocidade, tensão e corrente elétrica, não possuem medidas materializadas. Nesses casos a calibração dos sistemas de medição utilizado para determinar os valores dessas grandezas, necessariamente, deve ser feita de forma indireta. A Figura 5 apresenta um esquema com exemplo de calibração de um manômetro, que é feita de forma indireta, ou seja, utiliza-se um manômetro padrão e uma bomba para gerar a pressão que é medida simultaneamente por dois manômetros. Os resultados obtidos são comparados e com isso as incertezas e as correções são calculadas para o instrumento a calibrar.

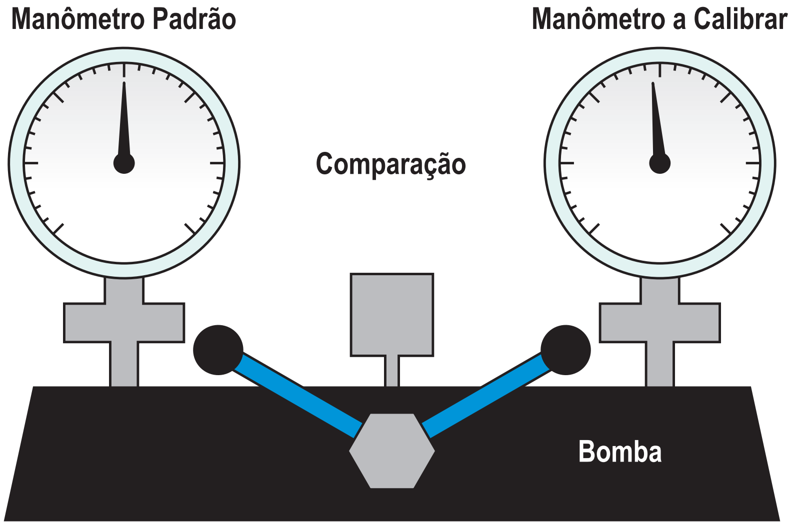


Figura 5 – Exemplo de Calibração Indireta (Manômetro)

1.5. Certificado de Calibração

A calibração permite avaliar as incertezas do processo de medição, além de identificar os desvios entre os valores indicados por um instrumento e os Valores Verdadeiros Convencionais (VVC), independentemente do tipo de calibração utilizado. O produto final da calibração é um documento denominado Certificado de Calibração, também conhecido como Carta de Calibração. Este documento é um relatório resumido, onde são apresentadas as principais informações relacionadas com a execução da calibração e seus principais resultados, e é dado um parecer conclusivo sobre o sistema de medição. Para ser considerado um documento oficial aqui no Brasil, ele deve ser emitido por um laboratório da RBC (Rede Brasileira de Calibração) certificado pelo Inmetro. Há pelo menos oito informações importantes listadas abaixo, que devem constar num certificado de calibração.

1. Identificação, com pelo menos nome e endereço, do contratante e do laboratório contratado.
2. Dados do sistema de medição calibrado, tais como: fabricante, modelo, número de série, faixa de medição, resolução, etc.
3. Dados do Padrão utilizado, tais como: fabricante, modelo, número de registro do último certificado de calibração (para permitir rastreabilidade), incerteza expandida, etc.
4. Resumo da Calibração, identificando o procedimento utilizado e os principais resultados obtidos.
5. Detalhamento do procedimento de calibração executado, identificando, por exemplo, os pontos de medição ao longo da faixa de medição do instrumento e o número de ciclos de medição efetuados durante a calibração.

6. Registro das condições ambientais presentes durante o procedimento de calibração, por exemplo, temperatura, pressão e umidade relativa do ar.
7. Resultados, contendo no mínimo: correção, erro máximo e incerteza expandida. Quando necessário devem constar também informações sobre quaisquer: manutenções, ajustes, regulagens, reparos, modificações realizadas, e limitações de uso do instrumento, como por exemplo, limitação na faixa de medição.
8. Identificação e assinaturas das pessoas responsáveis pela calibração, bem como do gerente técnico responsável pelo laboratório.

2. Expressão do Resultado de Medição

Objetivos de aprendizagem: Discutir o conceito de Resultado de Medição. Apresentar regras de grafia para o Resultado de Medição.

Em toda medição busca-se um número que represente um valor para o mensurando. Em geral, o instrumento de medição fornece uma indicação que é uma estimativa inicial do valor da medida. No entanto, há sempre erro no processo de medição. Para que o Resultado de Medição seja escrito de forma completa é necessário considerar os erros inerentes ao processo. Mesmo quando todos os componentes de erro conhecidos ou suspeitos são avaliados e corrigidos, ainda permanece dúvida sobre o valor declarado. Portanto, o Resultado de Medição (RM) só será expresso de forma completa quando composto por dois componentes: um resultado base (RB) e uma incerteza de medição (IM). Esta última está relaciona com a dúvida remanescente em torno do resultado base. O RM deve também sempre vir acompanhado por uma unidade de medida coerente.

$$\mathrm{RM} = (\mathrm{RB} \pm \mathrm{IM})\ \text{unidade} \qquad (1)$$

Exemplo. Uma fábrica produziu um eixo com diâmetro nominal (de projeto) de 10 mm e com tolerância de 0,5 mm em torno do valor nominal. O diâmetro foi medido em três momentos diferentes. O operador da máquina mediu o eixo logo após a fabricação e relatou o seguinte resultado: (9,9 ± 0,9) mm. O engenheiro do controle de qualidade mediu o mesmo eixo e encontrou o resultado de (10,1 ± 0,1) mm. O cliente, no momento da compra, mediu o eixo e reportou o valor de (10,3 ± 0,6) mm. Qual resultado apresenta maior qualidade?

Quando o Resultado de Medição é expresso de forma completa, isto é, com resultado base e a incerteza de medição é fácil avaliar a qualidade da medida. A primeira medição indica que o valor do mensurando está dentro da faixa entre 9,0 mm e 10,8 mm; a segunda dentro da faixa entre 10,0 mm e 10,2 mm; e a terceira dentro da faixa entre 9,7 mm e 10,9 mm. Desta forma, a qualidade da segunda medição é maior, pois, é a que apresenta a faixa mais estreita e, portanto gera menos dúvida a respeito do valor verdadeiro do mensurando.

Nem sempre as medições são reportadas com sua componente de incerteza. Nesses casos, é difícil a avaliação da qualidade da medição. Se no caso anterior somente os valores 9,9 mm, 10,1 mm e 10,3 mm tivessem sido reportados seria impossível saber qual das três medidas apresentava maior qualidade. No entanto, a estimativa da incerteza de medição nem sempre é trivial. Muitas vezes, a determinação da incerteza de medição acarreta um gasto de tempo que pode não ser justificável em medições corriqueiras nas quais a qualidade da medição não é fator relevante. O operador de uma máquina, por exemplo, utiliza a medição para monitorar a dimensão da peça durante a fabricação. Nesse caso, é importante que ao adquirir o instrumento de medição seja verificado se erro máximo do instrumento é adequado para avaliação da dimensão requerida no processo de fabricação. O erro máximo é determinante na compra do instrumento de medição, mas após a compra o operador não se preocupa mais com o erro no processo de medição. Ele simplesmente observa o valor indicado pelo instrumento em cada medição.

O mesmo ocorre com medições do cotidiano como o volume de combustível injetado pela bomba de combustível no carro. O valor reportado pela bomba não apresenta a componente de incerteza. No entanto, órgãos de fiscalização oficiais são responsáveis pela verificação do funcionamento do medidor de combustível nos postos e por garantir que os medidores trabalhem dentro de um limite de erro aceito pela legislação pertinente. O mesmo acontece com inúmeros instrumentos de uso corriqueiro como balanças de supermercado, medidores de pressão arterial, produtos com valores pré-medidos, entre outros.

A estimativa rigorosa da incerteza de medição deve levar em consideração incertezas provindas da calibração e aquelas geradas no próprio processo de medição. O processo de estimativa e de cálculo das incertezas pode ser custoso para medições corriqueiras ou de importância secundária. Nesses casos, quando é necessária a estimativa da incerteza de medição, é possível recorrer a parâmetros menos rigorosos, como os erros máximo ou fiducial fornecidos, em geral, pelo fabricante do instrumento de medição. Algumas vezes, são feitas ainda estimativas "grosseiras" baseadas na resolução do instrumento, como adotar para a régua de papelaria o erro máximo de 1 mm (o valor de uma divisão da régua).

Exemplo. Um luxímetro digital (instrumento utilizado para medir iluminância) possui faixa de medição de 1 lux a 200 lux e **erro fiducial**[29] de 5% do valor da leitura, mais 0,5% do valor de fundo de escala. A iluminância da sala de aula número 301 do pavilhão de aulas da Universidade Federal de Viçosa foi medida às 17 h 00 do dia 28 de dezembro de 2019, no ponto central da sala, a 1,5 m do chão (definição do mensurando). O objetivo da medição é verificar se o nível de iluminância no horário indicado é adequado para leitura. O luxímetro reportou o valor de 160 lux. Qual o resultado da medição?

Vale ressaltar, neste exemplo, a importância de definir completamente o mensurando. A iluminância da sala varia com o tempo e com a posição de medição. Portanto, se o mensurando fosse definido como a iluminância da sala, um valor representativo da iluminância, que varia no tempo e no espaço da sala deveria ser considerado, o que poderia acrescentar novas incertezas ao Resultado de Medição. Nesse caso, como o valor do mensurando está definido apenas por uma medição, a incerteza de medição será estimada com base no erro fiducial do instrumento fornecido pelo fabricante. Foram relatadas duas componentes para o erro fiducial, uma dependente do valor da leitura e outra do valor do fundo de escala, ou seja, maior valor que pode ser medido em determinada escala de medição (faixa nominal) do instrumento.

$$IM = (0{,}05 \text{ x } 160 + 0{,}005 \text{ x } 200) \text{ lux} = 9 \text{ lux}$$

$$RM = (160 \pm 9) \text{ lux}$$

29. **Erro fiducial** é o erro do instrumento de medição dividido por um valor especificado para o instrumento. Em geral, é dado em forma de porcentagem.

Com o Resultado de Medição obtido espera-se que o valor verdadeiro do mensurando esteja dentro da faixa entre 151 lux e 169 lux. O propósito desta medição é apenas a verificação rotineira de um nível de iluminância. A medição não requer confirmação de rastreabilidade metrológica, procedimento que exigiria uma prévia calibração do instrumento de medição e que necessitaria de um tratamento mais rigoroso para o cálculo da incerteza de medição.

2.1. Grafia do Resultado de Medição

É importante que o relato do Resultado de Medição seja expresso por um sistema de unidades completo, coerente e escrito de maneira uniforme. Por esse motivo, é altamente aconselhável que as unidades de medida utilizadas na medição e a grafia dessas unidades sigam regras estabelecidas pelo Sistema Internacional de Unidades (SI). Os próximos tópicos abordam: manipulação de algarismos significativos, regras de arredondamento, uso de múltiplos e submúltiplos do SI e grafia de unidades.

a) Algarismos significativos

Todo instrumento de medição possui uma resolução limitada por seu dispositivo mostrador, ou seja, a indicação de uma medição é limitada ao número de algarismos visualizáveis no dispositivo mostrador, direta ou indiretamente (por meio de estimativa em situações nas quais a leitura localiza-se entre duas marcas em uma escala de indicação analógica). Algarismos extras não tem significado, isto é, só são algarismos significativos aqueles passíveis de leitura no mostrador do instrumento.

A quantidade de algarismos significativos de um número é obtida a partir da contagem do primeiro algarismo diferente de zero da esquerda para direita até o último algarismo, considerado duvidoso. Os números 0,2; 0,025; 0,25 e 2,50 possuem, por exemplo, 1, 2, 2 e 3 algarismos significativos, respectivamente. Quando medidas são somadas ou subtraídas, o resultado deve conter o mesmo número de casas decimais que a medida com o menor número de casas decimais. Quando medidas são multiplicadas ou divididas, o resultado deve ter o mesmo número de algarismos significativos que a medida com a menor quantidade de algarismos significativos. Como regra geral, para operações mais complexas, o resultado deve conter a mesma quantidade de algarismos significativos que a parcela com menos algarismos significativos.

Exemplos: 12,0 + 2,20 = 14,2;   150 x 10 = 15 x 10^2;   150 / 10 = 15.

b) Regras de arredondamento

Quando é necessário arredondar uma medida, a norma ABNT-NBR 5891:1977 descreve as seguintes regras de arredondamento.

- Quando o algarismo seguinte ao último algarismo a ser conservado for inferior a 5, o último algarismo a ser conservado permanecerá sem modificação. Exemplo: 1,435 arredondado à primeira casa decimal torna-se 1,4.
- Quando o algarismo seguinte ao último algarismo a ser conservado for superior a 5, ou sendo 5, for seguido de no mínimo um algarismo significativo diferente de zero, o último algarismo a ser conservado deverá ser aumentado de uma unidade. Exemplo: 1,55050 arredondado na primeira casa decimal se tornará 1,6; e 1,785 se tornará 1,8.

- Quando o algarismo imediatamente seguinte ao último algarismo a ser conservado for 5 seguido de zeros, dever-se-á arredondar o algarismo a ser conservado para o algarismo par mais próximo. Exemplo: 1,650 arredondado na primeira casa decimal se tornará 1,6; e 1,750 se tornará 1,8.

c) Regras para escrita do Resultado de Medição

A Incerteza de Medição (IM) é uma estimativa, em geral estatística, da dispersão da medida em torno do Resultado Base (RB). Por se tratar de uma estimativa, não faz sentido atribuir vários algarismos significativos a IM. Em medições rigorosas, como nas calibrações, admite-se o uso de até 2 algarismos significativos para IM. Em medições cotidianas, recomenda-se o uso de 1 algarismo significativo. Exemplo: o RM = (1,24 ± 0,0423) m deve ser reescrito da seguinte forma RM = (1,24 ± 0,04) m. Exceção deve ser feita quando o arredondamento da IM causar perda maior que 20% no valor da IM. Exemplo: o RM = (1,240 ± 0,0142) m deve ser reescrito da seguinte forma RM = (1,240 ± 0,014) m, já que o arredondamento para 0,01 acarretaria numa diminuição de aproximadamente 30% do valor inicial. Nesse caso, torna-se prudente o uso de 2 algarismos significativos.

Resumindo: A Incerteza de Medição (IM) deve ser arredondada de forma a ter, no máximo, dois algarismos significativos. Como regra geral, deve-se utilizar somente um algarismo significativo.

Após acertado o número de algarismos significativos da IM, não faria sentido escrever o RB com mais casa decimais que a IM. Exemplo: o RM = (5,675 ± 0,2) m deve ser reescrito da seguinte forma RM = (5,7 ± 0,2) m.

Resumindo: O Resultado Base (RB) deve ser arredondado de maneira que seu número de casas decimais seja equivalente ao da Incerteza de Medição (IM).

d) Múltiplos e submúltiplos do SI

Para expressar quantidades muito grandes ou muito pequenas sem precisar recorrer a vários algarismos ou potências de 10, o Sistema Internacional de Unidades (SI) apresenta um conjunto de múltiplos e submúltiplos que podem ser usados como prefixo das unidades do SI. Os múltiplos variam do prefixo quilo (10^3) até o prefixo yotta (10^{24}). E os submúltiplos variam, em ordem decrescente, do prefixo mili (10^{-3}) até o prefixo yocto (10^{-24}). As tabelas 1 e 2 indicam os prefixos de múltiplos e submúltiplos do SI.

Tabela 1 - Múltiplos do SI

Prefixo	Símbolo	Multiplicador
quilo*	k	10^3
mega	M	10^6
giga	G	10^9
tera	T	10^{12}
peta	P	10^{15}
exa	E	10^{18}
zetta	Z	10^{21}
yotta	Y	10^{24}

* ou kilo

Tabela 2 - Submúltiplos do SI

Prefixo	Símbolo	Multiplicador
mili	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}
zepto	z	10^{-21}
yocto	y	10^{-24}

Além desses, os prefixos centi (10^{-2}), deci (10^{-1}), deca (10^{1}) e hecto (10^{2}) também são prefixos do SI. No entanto, recomenda-se que seja evitado o uso destes prefixos.

e) Grafia das unidades de medida

Regras para redação de nomes de unidades, plural de nomes de unidades, grafia de símbolos de unidades, de prefixos e números devem ser observadas na documentação de Resultados de Medição. As regras aqui expostas são válidas para qualquer texto formal que utilize grandezas e suas unidades, não somente para textos relacionados a Metrologia.

- **Nome de unidades:** Os nomes de unidades sempre começam com letra minúscula, mesmo sendo derivados de nome próprio. Exemplos com grafia incorreta: Grau Celsius, grau celsius, Newton, Farad e Joule. Exemplos com grafia correta: grau Celsius, newton, farad e joule. Observa-se que o nome da unidade de temperatura grau Celsius, símbolo ºC, não é uma exceção à regra de se escrever o nome das unidades com letra minúscula. Isso porque a unidade grau começa pela letra "g" minúscula e o adjetivo "Celsius" começa pela letra "C" maiúscula, pois este é um nome próprio. A exceção para que o nome de uma unidade comece com letra maiúscula, ocorre tão somente quando estiver localizado no início da frase ou em sentença com letras maiúsculas, como em um título (Portaria nº 590 do Inmetro, de 02 de dezembro de 2013).
- **Plural de nome de unidade:** O plural deve ser feito acrescentado a letra 's' no final da unidade de forma a não desfigurar seu nome. A exceção é para os nomes terminados em 's', 'x' ou 'z' que não recebem 's' no final. Nas unidades formadas por multiplicação de unidades, as unidades constituintes vão todas para o plural. Quando a unidade é resultado de divisão, as unidades do numerador ficam no plural, e as do denominador ficam no singular e são antecedidas pela preposição 'por'. Exemplos com grafia **incorreta**: newton-metros, quilômetros por segundos, luxes, pascais e decibéis. Exemplos com grafia **correta**: newtons-metros, quilômetros por segundo, lux, pascals e decibels.
- **Símbolos de unidade:** Os símbolos de unidade não possuem variação para o plural. Quando são símbolos derivados de nome de pessoas devem ser iniciados com letra maiúscula, com exceção do símbolo da unidade 'litro' que pode ser escrito em maiúsculo (mesmo não sendo derivado de nome de pessoa) ou em minúsculo. A justificativa é que a letra 'l' minúscula pode ser confundida com o número '1'. Exemplos com grafia **incorreta**: 10 ns (dez newtons), 50 s (cinquenta siemens), 80 k (oitenta kelvins), 90 ms (noventa metros), 15 kgs (quinze quilogramas). Exemplos com grafia **correta**: 10 N (dez newtons), 50 S (cinquenta siemens), 80 K (oitenta kelvins), 90 m (noventa metros), 15 kg (quinze quilogramas), etc.
- **Prefixos:** Os prefixos são utilizados individualmente para cada unidade, isto é, não deve haver justaposição de prefixos.
- **Números:** Na língua portuguesa, o separador decimal deve ser a vírgula. Sempre que o número for inferior a 1, deve-se acrescentar um zero à esquerda da vírgula. Recomenda-se que os algarismos da parte inteira e os da parte decimal dos números sejam separados em grupos de três, a contar da vírgula para a esquerda e para a direita, com pequenos espaços entre esses grupos, como, por exemplo, em trabalhos de caráter técnico ou científico. Também é admitido que os algarismos das partes inteira e decimal sejam escritos seguidamente (isto é, sem separação em grupos). Exceção é feita aos números que representam quantias em dinheiro ou quantidades de mercadorias, bens ou serviços em documentos para efeitos fiscais, jurídicos e/ou comerciais, e devem ser escritos com os algarismos separados em grupos de três, a contar da vírgula para a esquerda e para direita, com pontos separando esses grupos entre si. Portaria nº 590, de 02 de dezembro de 2013).

3. Estatística aplicada à medição

Objetivos de aprendizagem: Apresentar a Estatística como ferramenta para medição. Discutir os indicadores de centralidade e de dispersão. Apresentar o conceito de distribuição de probabilidade e as distribuições Normal, t-Student, Retangular e Triangular. Discutir o conceito de intervalo de confiança. Calcular a correlação entre variáveis e interpretar o significado do coeficiente de correlação.

A Estatística tem papel fundamental na Metrologia. Como qualquer medição possui erro, cujo valor não pode ser determinado com exatidão, o uso de ferramentas estatísticas permite estimar as incertezas inerentes a medição, assim como estimar e corrigir erros sistemáticos. Medições possuem comportamento aleatório sujeito a variabilidade experimental. Por apresentar esse comportamento, é possível estimar características de um sistema de medição a partir de um conjunto de dados coletados. Nesse contexto, a Estatística é uma ferramenta fundamental para a Metrologia. Vale ressaltar que estimativas estatísticas são feitas a partir de um conjunto de dados, e não a partir de dados individuais. Quanto mais rico o conjunto de dados, melhor será a estimativa.

Nesse ponto é importante distinguir amostra e população, pois há diferenças no tratamento de dados amostrais e de dados populacionais. Uma população contém dados de todo um conjunto, isto é, todos os membros do conjunto estão representados. Enquanto uma amostra contém apenas alguns dados de uma população, escolhidos aleatoriamente. As idades de todos os eleitores brasileiros são dados populacionais dos eleitores brasileiros. As idades de mil eleitores brasileiros escolhidos aleatoriamente representam dados amostrais dos eleitores brasileiros. É importante destacar que através de dados amostrais é possível fazer inferências e descobrir características da população. Esse fato é de vital importância em Metrologia, pois medições representam populações infinitas, visto que infinitas medições podem ser feitas utilizando o mesmo mensurando, nas mesmas condições de medição, o que inviabilizaria qualquer estimativa que dependesse de todos os dados populacionais. Por consequência, dados de medições são sempre amostrais. Este capítulo trata de conceitos estatísticos aplicados a conjuntos de dados de medições.

3.1. Coleta, representação e indicadores

O passo inicial para fazer inferências sobre o comportamento de uma população a partir de uma amostra é a coleta cuidadosa dos dados visando garantir aleatoriedade. A amostra deve representar com certo grau de fidelidade a população, abrangendo a variabilidade existente na condição de medição. Em geral, as medições são feitas em **condições de repetibilidade**[30], isto é, condições específicas de medição. Um dos cuidados funda-

30. **Condição de repetibilidade.** Condição de medição num conjunto de condições, as quais incluem o mesmo procedimento de medição, os mesmos operadores, o mesmo sistema de medição, as mesmas condições de operação e o mesmo local, assim como medições repetidas no mesmo objeto ou em objetos similares durante um curto período de tempo (definição 2.20 do VIM – 2012).

mentais na coleta de dados para garantir condição de repetibilidade é com a destreza do operador no manuseio do sistema de medição. Erros grosseiros podem ser causados pela falta de habilidade do operador e/ou pelo uso inadequado dos equipamentos. Esse tipo erro é imprevisível e pode invalidar a análise posterior dos dados coletados.

Após a coleta de dados, o próximo passo é organizá-los utilizando ferramentas que permitam visualizar e descrever o comportamento dos dados. Imagine uma situação onde a massa de uma peça foi medida, em condição de repetibilidade, 12 vezes em uma balança (1) e outras 12 vezes em outra balança (2). As indicações obtidas estão nas tabelas abaixo na ordem da coleta dos dados. Como determinar um valor para a massa da peça a partir das medições? Qual balança é mais precisa?

Tabela 3 - Indicações de 12 medições da massa de uma peça (em gramas) medidas pela balança 1.

16	16	14	16	15	16
14	15	14	14	16	14

Tabela 4 - Indicações de 12 medições da massa de uma peça (em gramas) medidas pela balança 2.

16	15	14	15	15	15
13	14	15	14	15	14

Observando os dados da tabela acima é difícil determinar um valor para massa em cada uma das duas situações, assim como também é difícil saber qual balança é mais precisa. Uma maneira de visualizar melhor os dados é por meio de uma tabela de frequências, na qual é indicado o quão frequente cada valor ou classe de valores aparece na amostra. Quando os dados são discretos, cada tipo de dado pode representar uma classe. Quando os dados são contínuos, é necessário dividir os dados em classes que representam faixas de valores. Um indicativo da quantidade de classes a ser usada numa tabela de distribuição de frequências é a raiz quadrada do número de dados. Uma amostra com 100 dados seria dividida em 10 ($\sqrt{100}$) classes (quando o resultado não é inteiro, arredonda-se para o inteiro mais próximo). A Tabela 5 apresenta a distribuição de frequência das medições feitas nas balanças descritas acima, em valores absolutos e relativos. A Figura 6 apresenta as frequências relativas em forma de histograma.

Tabela 5 – Distribuição de frequência das indicações em cada uma das balanças.

Massa	Frequência (balança 1)		Frequência (balança 2)	
	Absoluta	Relativa	Absoluta	Relativa
13	0	0%	1	8,3%
14	5	41,7%	4	33,4%
15	2	16,6%	6	50,0%
16	5	41,7%	1	8,3%

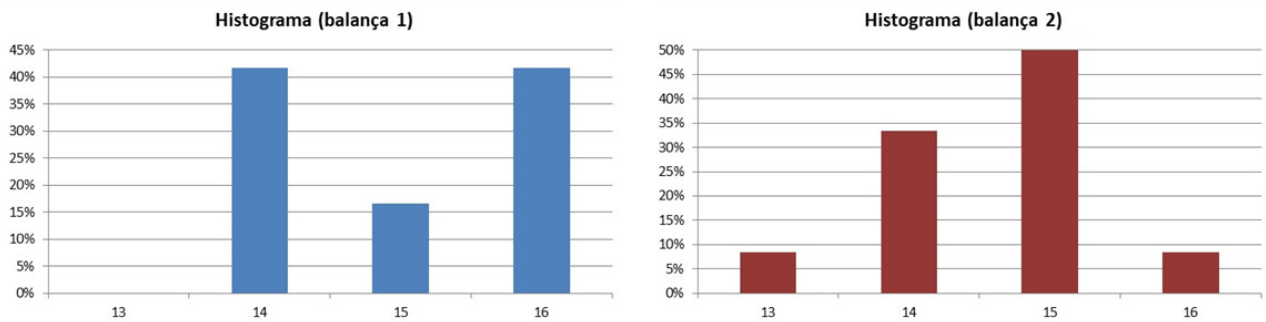


Figura 6 - Histograma das indicações das medições em cada uma das balanças.

A distribuição de frequência e os histogramas já permitem verificar que os dados das duas medições possuem comportamentos diferentes. No entanto, ainda é difícil encontrar um valor que possa ser atribuído à massa medida ou até mesmo afirmar qual dos conjuntos de dados é mais disperso apenas analisando a distribuição de frequências e os histogramas. Nessa etapa, o uso de descritores quantitativos facilitará a comparação entre os dois conjuntos de dados. Os descritores de centralidade permitirão encontrar um valor central para atribuir a massa da peça em cada uma das duas situações. E os descritores de dispersão permitirão verificar qual conjunto de dados é menos disperso e, consequentemente, qual balança é mais precisa.

a) Descritores de centralidade

Os descritores de centralidade definem um valor central ou mais típico de um conjunto de dados. São uma forma compacta de representar um conjunto de dados. Dentre os mais comuns estão a média, a mediana e a moda. A mediana e a moda determinam valores centrais utilizando parte dos dados do conjunto, o que algumas vezes pode não refletir o comportamento do todo. Enquanto a mediana é o valor do dado mais central, a moda é o valor do dado que mais se repete. Em Metrologia, a estimativa de valores centrais para conjuntos de medições é sempre feita através da média amostral que é uma estimativa da média populacional. A média amostral é calculada da seguinte forma.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \text{(média amostral)},$$

onde $\bar{x}$ é a média amostral, x_i representa os dados e n o total de dados.

O valor mais provável de uma grandeza, medida diversas vezes, é a média (aritmética) das medidas encontradas, desde que todas mereçam a mesma confiança. Abaixo estão calculadas as médias para as indicações obtidas na balança 1 e na balança 2 descritas anteriormente.

$$\bar{x}_1 = \frac{16+16+14+16+15+16+14+15+14+14+16+14}{12} = 15{,}0\ g \qquad \text{(Balança 1)}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{16+15+14+15+15+15+13+14+15+14+15+14}{12} = 14{,}6\ g \qquad \text{(Balança 2)}$$

Portanto, pode-se atribuir 15,0 g a massa da peça quando medida pela primeira balança, e 14,6 g quando medida pela segunda balança. Há outros fatores como a correção de erros sistemáticos das balanças que podem provocar alteração nestes valores. O efeito da correção nos valores atribuídos a medição será tratado mais à frente.

b) Descritores de dispersão

A média amostral é um indicativo de valor central para a medida, mas não dá nenhuma informação sobre a dispersão dos dados. Os descritores de dispersão permitem estimar o quão concentrados ou dispersos estão os dados. Dentre os mais comuns estão a amplitude, o desvio padrão e a variância.

A **amplitude** é a diferença entre o maior e o menor valores medidos (da amostra), ou seja, é uma medida de dispersão baseada em dois dados extremos da amostra que não considera os demais dados. Por este motivo, a amplitude pode não refletir a dispersão dos dados como um todo, principalmente em amostras grandes.

A **variância** e o **desvio padrão** guardam uma íntima relação entre si. O desvio padrão é a raiz quadrada da variância. A variância amostral é calculada levando em consideração todos os dados da amostra, utilizando-se a seguinte equação:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2}{n-1} \qquad \text{(variância amostral),}$$

onde s^2 é a variância amostral, $\bar{x}$ é a média amostral, x_i representa os dados individuais e n o total de dados. Consequentemente, o desvio padrão amostral é calculado da seguinte forma:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2}{n-1}} \qquad \text{(desvio padrão amostral),}$$

onde s é o desvio padrão amostral, $\bar{x}$ é a média amostral, x_i representa os dados individuais e n o total de dados. Observe os desvios padrões para as indicações obtidas para as balanças 1 e 2 descritas anteriormente:

$$s_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{12}(15{,}0 - x_i)^2}{12-1}} = 0{,}953\ g \qquad s_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{12}(14{,}6 - x_i)^2}{12-1}} = 0{,}793\ g$$

Verifica-se que os dados de medição da balança 1 são mais dispersos que os da balança 2, o que permite concluir que a primeira é menos precisa que a segunda.

c) Dispersão da média amostral

A média amostral ($\bar{x}$) é um indicativo da média populacional (μ), assim como a variância amostral (s^2) é um indicativo da variância populacional (σ^2). É possível estimar a variância populacional da média ($\sigma_{\bar{x}}^2$) a partir da variância populacional dos dados (σ^2) e do número de repetições da medida (n):

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Ou utilizando a variância amostral como estimador para a variância populacional:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{s^2}{n}$$

A equação acima pode ser reescrita substituindo a variância pelo desvio padrão:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

O equacionamento acima é derivado do Teorema do Limite Central que será apresentado no próximo tópico. Seguem abaixo os desvios padrões da média para o exemplo de medição da massa da peça nas duas balanças.

$$\sigma_{\bar{x}1} = \frac{0{,}953}{\sqrt{12}} = 0{,}275\ g \qquad \sigma_{\bar{x}2} = \frac{0{,}793}{\sqrt{12}} = 0{,}229\ g$$

Os resultados permitem verificar que a dispersão da média é menor que a dispersão dos dados. E será menor ainda quanto maior for a quantidade de dados, tendendo para zero quando o número de dados tender a infinito.

3.2. Distribuições de probabilidade

Distribuição de probabilidade de uma variável aleatória é a descrição das probabilidades associadas com os possíveis valores da variável. É uma função que relaciona a variável aleatória com sua probabilidade de ocorrência. Através da distribuição de probabilidade é possível estimar qual a chance de um determinado valor da variável aleatória ocorrer. De forma geral, as funções de distribuição de probabilidade descrevem o comportamento de uma variável aleatória. As distribuições de probabilidade mais importantes para modelar fontes de incerteza de medição são: Normal, t-Student, Retangular e Triangular.

a) Distribuição Normal

A distribuição Normal é a distribuição de probabilidades mais utilizada. Sempre quando um experimento aleatório é repetido, a média dos dados obtidos tende a uma distribuição Normal. Ou ainda, a combinação de variáveis aleatórias resulta numa distribuição que se aproxima de uma distribuição Normal quanto maior for o número de variáveis aleatórias. Estes dois enunciados descrevem o **Teorema do Limite Central** que permite que a média e o desvio padrão populacionais sejam calculados em função da média e do desvio padrão amostrais, de acordo com as equações mostradas anteriormente.

A importância desses enunciados para construção de modelos para medição é fundamental. A estimativa do valor da medição é feita através de médias aritméticas que podem agora ser modelados por uma distribuição Normal, com a média e o desvio padrão calculados a partir dos dados da amostra. Os erros inerentes a medição são a combinação de um conjunto de variáveis aleatórias, o que permite concluir que o erro também terá o comportamento de uma distribuição Normal. A função de distribuição de probabilidade Normal é descrita matematicamente da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

onde $f(x)$ é a função de distribuição de probabilidade, x é o valor da variável aleatória, μ é a média populacional, e σ é o desvio padrão populacional.

Portanto, conhecendo-se a média e o desvio padrão de uma distribuição Normal, pode-se calcular a probabilidade de ocorrência de um determinado valor. A função de distribuição de probabilidade Normal apresenta o formato de um sino com simetria em relação ao pico centrado na média (Figura 7).

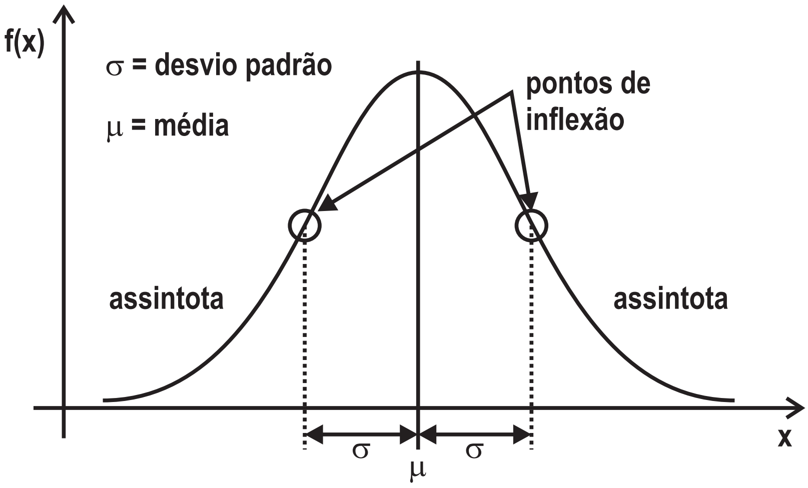


Figura 7 - Função de distribuição de probabilidade Normal.

Um resultado muito importante para a construção de modelos de incerteza de medição são os intervalos estatísticos relacionados à distribuição Normal que permitem afirmar que pelo menos:

- 68,27% dos dados então dentro do intervalo $\mu \pm 1{,}00.\sigma$;
- 95,00% dos dados então dentro do intervalo $\mu \pm 1{,}96.\sigma$;
- 95,45% dos dados então dentro do intervalo $\mu \pm 2{,}00.\sigma$;
- 99,00% dos dados então dentro do intervalo $\mu \pm 2{,}58.\sigma$;
- e 99,73% dos dados então dentro do intervalo $\mu \pm 3{,}00.\sigma$.

Habitualmente, os modelos de incerteza com distribuição Normal utilizam o grau de confiança de 95,45% com intervalo de confinação entre $\mu \pm 2{,}00.\sigma$. É importante ressaltar que os intervalos são calculados com a utilização da média e do desvio padrão **populacionais**. A Figura 8 ilustra a distribuição Normal com os intervalos de confiança mais usuais.

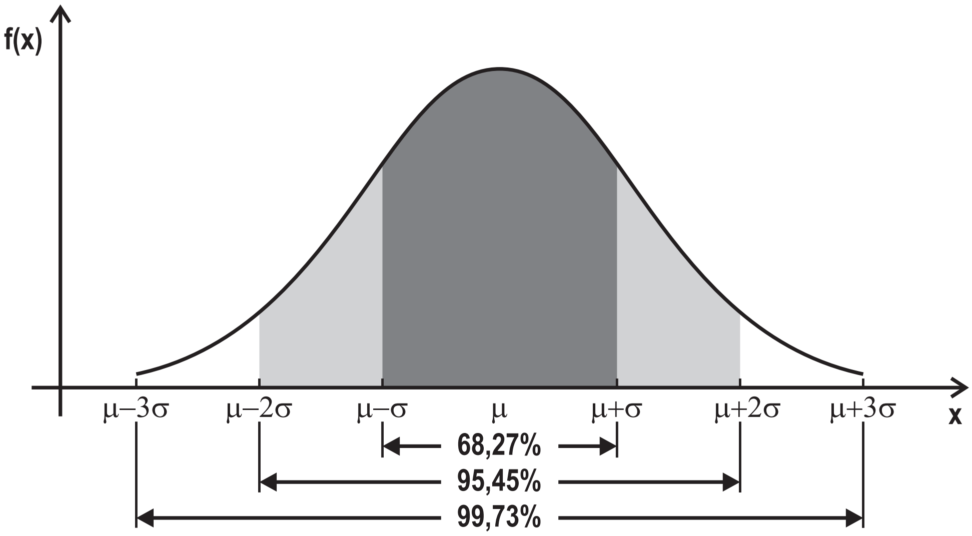


Figura 8 - Intervalos estatísticos para distribuição Normal.

Exemplo. Sabendo que as indicações de um paquímetro para a medição da dimensão do diâmetro de uma peça segue distribuição Normal com média 12,25 mm e desvio padrão de 0,75 mm, calcule o intervalo no qual é garantido que 95,45% dos dados estarão.

O intervalo estatístico com grau de confiança de que 95,45% é de μ ± 2,00.σ. Para este exemplo, μ = 12,25 mm e σ = 0,75 mm, o que acarreta no intervalo entre 10,75 mm e 13,75 mm. Este resultado permite afirmar que, pelo menos, 95,45% das medições feitas em condição de repetibilidade pertencerão ao intervalo calculado. É importante observar que para o cálculo do intervalo acima foi necessário o uso da média e o desvio padrão populacional. Muitas vezes, só são conhecidos a média e o desvio padrão amostral. Para contornar as estimativas feitas a partir de amostras pequenas, a distribuição t-Student corrige a constante que multiplica o desvio padrão no cálculo do intervalo de confiança. Como o aumento do número de repetições de um experimento é custoso, as estimativas dos intervalos de confiança são feitas a partir de poucas medições e são corrigidas através da distribuição t-Student, descrita a seguir.

b) Distribuição t-Student

A distribuição t-Student surgiu da necessidade de estimar parâmetros de um conjunto infinito de dados de uma população com distribuição Normal a partir de amostras finitas. O comportamento da distribuição t-Student se iguala ao comportamento de uma distribuição Normal quando o número de dados tende a infinito, como ilustrado na Figura 9. Nessa figura, v representa o número de graus de liberdade, característica da distribuição t-Student que equivale ao número de medições menos um. Repare que distribuições com graus de liberdade maiores possuem uma concentração de dados maior perto da média e se aproximam mais de uma distribuição Normal que as distribuições t-Student com menos graus de liberdade.

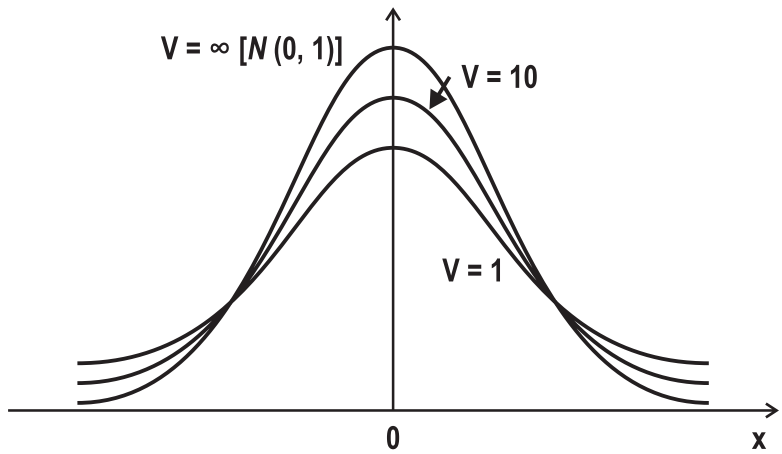


Figura 9 - Funções de distribuição t-Student para diferentes graus de liberdade (k).

Os intervalos de confiança definidos no tópico anterior para uma distribuição Normal podem ser redefinidos com base no parâmetro *t* obtido pela aplicação de um grau de confiança a função de distribuição *t-Student* e do número de graus de liberdade da amostra, segundo a expressão seguinte:

$$\bar{x} \pm t \cdot s$$

Como é trabalhoso o cálculo da constante *t-Student*, seus valores são tabelados para diferentes graus de confiança e graus de liberdade. Na Tabela 6 são apresentados os valores de *t* em função dos graus de liberdade para o grau de confiança de 95,45% (grau de confiança usual em metrologia).

Tabela 6 - Coefecientes t-Student em função dos graus de liberdade (v) para o grau de confiança de 95,45%.

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
t	13,97	4,53	3,31	2,87	2,65	2,52	2,43	2,37	2,23	2,28	2,25	2,23	2,21	2,20
v	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**25**	**30**	**35**	**40**	**45**	**50**	**100**	**∞**
t	2,18	2,17	2,16	2,15	2,14	2,13	2,11	2,09	2,07	2,06	2,06	2,05	2,02	2,00

Exemplo. Calcule o intervalo com grau de confiança de 95,45% para os dois conjuntos de medição descritos na Tabela 3 e na Tabela 4 (na página 20) da massa de uma peça medida em duas balanças diferentes.

Foram feitas 12 medições da peça em cada balança, o que corresponde a 11 graus de liberdade (número de medições menos um) para cada conjunto de 12 medições. O parâmetro t-Student para 11 graus de liberdade vale 2,25. Utilizando as médias e os desvios padrões calculados anteriormente, obtém-se os seguintes intervalos de confiança.

$$(15{,}0 \pm 2{,}25 \cdot 0{,}953)g = (15{,}0 \pm 2{,}1)g \qquad \text{(balança 1)}$$

$$(14{,}6 \pm 2{,}25 \cdot 0{,}793)g = (14{,}6 \pm 1{,}8)g \qquad \text{(balança 2)}$$

Portanto, para balança 1 pode-se garantir que pelo menos 95,45% dos dados populacionais (de todas as medições possíveis em condição de repetibilidade) estão dentro da faixa entre 12,9 g e 17,1 g. Já para a segunda balança, o mesmo ocorre para a faixa entre 12,8 g e 16,4 g.

c) Distribuição Retangular

A distribuição Retangular ou Uniforme é caracterizada por apresentar a mesma probabilidade de ocorrência para todos os valores pertencentes a um intervalo determinado, e probabilidade zero para os demais valores. É utilizada para modelar incertezas com comportamento retangular como a incerteza relacionada ao arredondamento devido à resolução de instrumentos com mostrador digital. A função de distribuição Retangular apresenta o formato de um retângulo onde a média localiza-se exatamente na metade da base do retângulo, como ilustrado na Figura 10.

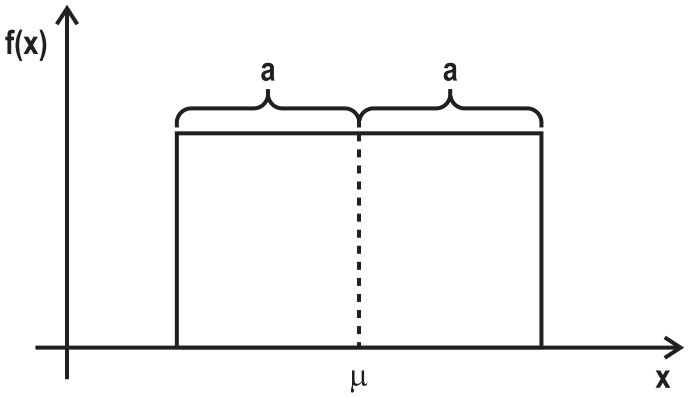


Figura 10 - Distribuição Retangular.

O desvio padrão relacionado a distribuição Retangular pode ser calculado em função da “largura” do retângulo (2.a, na figura acima) de acordo com a seguinte expressão.

$$s_{retangular} = \frac{a}{\sqrt{3}} \qquad \text{(desvio padrão da distribuição Retangular)}$$

onde $s_{retangular}$ é o desvio padrão da distribuição Retangular, e a é a metade da largura do retângulo.

Exemplo. Se as balanças utilizadas nos exemplos anteriores tivessem mostradores digitais com resolução de 1 g, qual seria o desvio padrão relacionado ao arredondamento devido a resolução do instrumento?

A resolução da balança limita os valores mostrados no display da balança a serem múltiplos inteiros de 1 g, isto é, valores como 15,65 g são arredondados pela balança de forma que o algarismo menos significativo fique na casa dos gramas. Considerando que o arredondamento utilize regras similares às regras de arredondamento matemático, para o número anterior, a balança mostrará 16 g. Ou melhor, qualquer mensurando com valor maior ou igual a 15,5 g e menor ou igual a 16,5 g terá o valor de 16 g atribuído a medição, isto é, dentro dessa faixa todos os valores tem a mesma probabilidade de arredondamento para 16 g. O comportamento do arredondamento devido a resolução é de uma distribuição retangular com a largura igual a resolução, como mostrado na Figura 11.

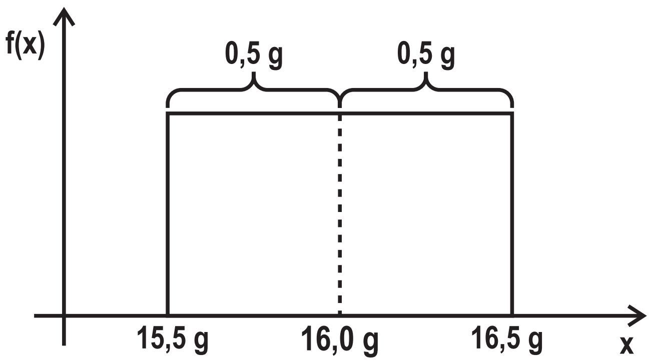


Figura 11 - Arredondamento da resolução de um instrumento digital modelado como uma distribuição retangular.

O desvio padrão associado ao arredondamento da resolução é o desvio padrão da distribuição Retangular acima.

$$s_{resolução} = \frac{0,5}{\sqrt{3}} = 0,29\ g \qquad \text{(desvio padrão do arredondamento da resolução)}$$

Além de modelar incertezas associadas ao arredondamento da resolução, a distribuição Retangular também é utilizada para modelar incertezas associadas a histerese, a gradientes de temperatura, entre outros.

d) Distribuição Triangular

A distribuição Triangular é caracterizada por apresentar maior probabilidade de ocorrência em valores centrais em torno da média e decai linearmente até suas extremidades. É menos usual que a distribuição retangular, costuma ser aplicada para modelar o arredondamento devido a resolução em instrumentos com mostrador analógico. Apresenta o formato de um triângulo isósceles onde a média localiza-se exatamente no ponto médio da base do triângulo, como ilustrado na Figura 12.

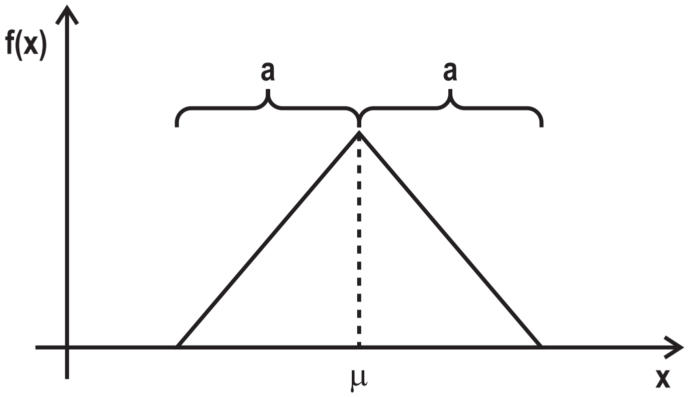


Figura 12 - Distribuição Triangular.

O desvio padrão relacionado a distribuição Triangular pode ser calculado em função da "largura" da base do triangulo (2.a, na figura acima) de acordo com a seguinte expressão.

$$s_{triangular} = \frac{a}{\sqrt{6}} \quad \text{(desvio padrão da distribuição Triangular)}$$

onde $s_{triangular}$ é o desvio padrão da distribuição Triangular, a e é a metade da largura da base do triângulo.

Exemplo. Se as balanças utilizadas nos exemplos anteriores tivessem mostradores analógicos com resolução de 1 g, qual seria o desvio padrão relacionado ao arredondamento devido a resolução do instrumento?

A solução deste exemplo é similar ao do exemplo anterior para distribuição Retangular. A diferença é que, agora, o arredondamento da resolução será modelado por uma distribuição Triangular, com largura igual à resolução como mostrado na figura abaixo.

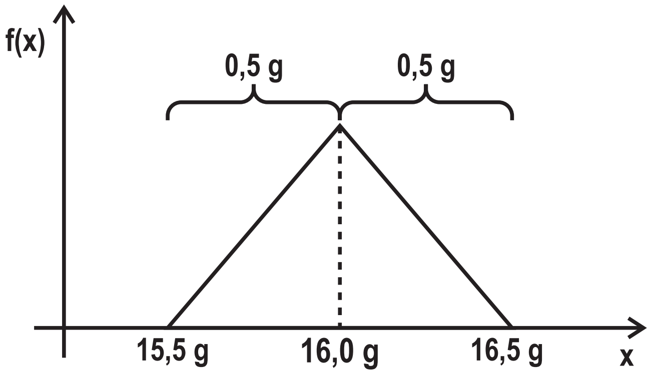


Figura 13 - Arredondamento da resolução de um instrumento digital modelado como uma distribuição retangular.

O desvio padrão associado ao arredondamento da resolução é o desvio padrão da distribuição Triangular acima.

$$s_{resolução} = \frac{0{,}5}{\sqrt{6}} = 0{,}20\ g \qquad \text{(desvio padrão do arredondamento da resolução)}$$

Repare que para a mesma situação, a dispersão (desvio padrão) da distribuição Triangular é menor que a da Distribuição Retangular. Na dúvida sobre qual distribuição adotar, a distribuição Retangular deve ser escolhida por ser mais conservadora que a distribuição Triangular.

3.3. Correlação estatística

A correlação estatística entre duas variáveis (ou grandezas) permite medir a dependência mútua relativa entre elas, isto é, o quanto a variação no valor de uma variável está relacionada a variação da outra variável. Permite que se avalie, por exemplo, se o crescimento do valor de uma variável tem relação ou não com o da outra variável. Essa avaliação é feita através do coeficiente de correlação entre duas grandezas X e Y, r(x,y), que pode ser calculado pela expressão abaixo, para dados amostrais.

$$r(x,y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_X}\right)\left(\frac{y_i - \bar{y}}{s_Y}\right)$$

onde S_X e S_Y são os desvios padrões amostrais das grandezas X e Y, $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são as médias amostrais das grandezas X e Y, x_i e y_i representam os dados individuais de pares ordenados de das grandezas X e Y, e n o total de pares de dados ordenados. O valor do coeficiente de correlação fica sempre no intervalo $-1 \leq r(x,y) \leq +1$. Seu valor indica o grau de relação linear entre as variáveis:

- $r(x,y) = +1$, indica uma **correlação positiva perfeita** entre as duas variáveis, isto é, os pares ordenados de X e Y pertencem todos a uma reta com declividade positiva;
- $r(x,y)$ *próximo* +1, indica uma **correlação positiva forte** entre as duas variáveis, isto é, os pares ordenados de X e Y se aproximam de uma reta com declividade positiva;
- $r(x,y)$ *próximo* +0, indica uma **correlação positiva fraca** entre as duas variáveis, isto é, os pares ordenados de X e Y estão dispersos, mas há ligeira tendência a declividade positiva;
- $r(x,y) = 0$, indica que **não há relação** entre as duas variáveis, isto é, os pares ordenados de X e Y estão dispersos e nenhuma tendência é observada;
- $r(x,y)$ *próximo* -0, indica uma **correlação negativa fraca** entre as duas variáveis, isto é, os pares ordenados de X e Y estão dispersos, mas há ligeira tendência a declividade negativa;
- $r(x,y)$ *próximo* -1, indica uma **correlação negativa forte** entre as duas variáveis, isto é, os pares ordenados de X e Y se aproximam de uma reta com declividade negativa;
- $r(x,y) = -1$, indica uma **correlação negativa perfeita** entre as duas variáveis, isto é, os pares ordenados de X e Y pertencem todos a uma reta com declividade negativa.

Exemplo. Para verificar se há correlação entre as medidas feitas nas balanças utilizadas nos exemplos anteriores, primeiramente, é necessário garantir que a mesma massa foi medida nas duas balanças e que cada par de medidas feita nas duas balanças ocorreu em situações similares e num período curto de tempo, formando desta forma um conjunto de pares ordenados. Partindo do pressuposto que isso aconteceu, pode-se estimar o coeficiente de correlação entre as medidas feitas nas duas balanças, a partir dos dados das medidas ordenadas em pares na Tabela 7. É importante ressaltar que cada par de medida foi obtido em situação de medição similar e num período curto de tempo

Tabela 7 - Indicações de 12 medições da massa de uma peça (em gramas) medidas pela balança 1 e balança 2.

Número da Medida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Balança 1	16	16	14	16	15	16	14	15	14	14	16	14
Balança 2	16	15	14	15	15	15	13	14	15	14	15	14

Os pares de dados da tabela acima podem ser visualizados no gráfico de dispersão mostrado na figura abaixo. Repare que os dados plotados não pertencem a uma reta, mas é fácil notar que há uma tendência de declividade positiva dos dados, isto é, em situações onde a balança 1 mede valores maiores, a balança 2 também tende a medir valores maiores.

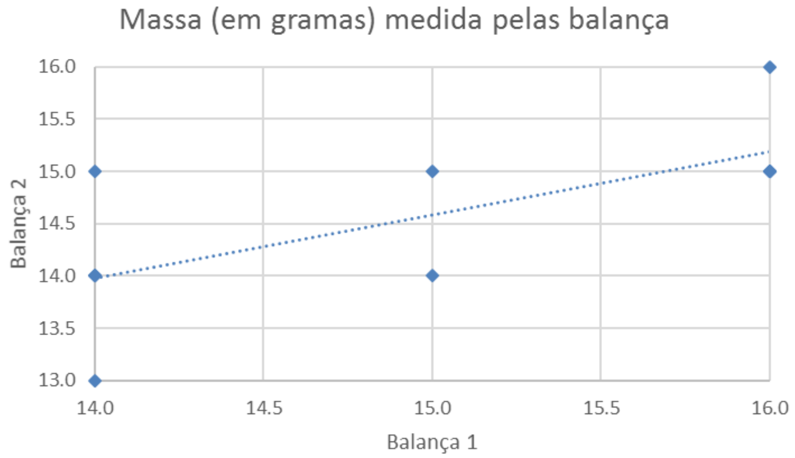


Figura 14 - Gráfico de dispersão dos pares de valores medidos na Balança 1 e na Balança 2 (em gramas).

A partir dos dados da Tabela 7 e da equação anterior é possível calcular o coeficiente de correlação entre as medidas feitas nas duas balanças:

$$r(x,y) = \frac{1}{12-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - 15,0}{0,953}\right)\left(\frac{y_i - 14,6}{0,793}\right) = +0,72$$

Repare que o valor do coeficiente de correlação foi de +0,72, o que indica que há uma correlação positiva forte entre as medidas feitas nas duas balanças.

Em metrologia, é muito comum na estimativa de incertezas que a incerteza de uma medição seja resultado da combinação de incertezas de diferentes grandezas. É muito comum que essas fontes de certeza tenham pouca relação entre si, o que leva a se adotar o valor zero para o coeficiente de correlação ($r(x,y) = 0$). Há situações também onde estima-se a incerteza de medições indiretas, como por exemplo, a área de um retângulo onde seus lados são medidos pelo mesmo instrumento em situações similares. Nesse caso, é comum se adotar o valor +1 para o coeficiente de correlação ($r(x,y) = +1$). Na dúvida, pode-se buscar levantar os valores das grandezas em questão em situações de similaridade e calcular o coeficiente de correlação entre as grandezas.

4. Avaliação da Incerteza de Medição e Cálculo do Resultado da Medição

4

Objetivos de aprendizagem: Trabalhar com modelos matemáticos de medição. Estimar incertezas de medição. Apresentar o conceito de incerteza padrão e de incerteza expandida. Interpretar dados de um certificado de calibração. Combinar incertezas de medição. Calcular o Resultado da Medição.

O objetivo de uma medição é a determinação do valor do mensurando. Na realidade, estima-se o valor do mensurando que deve ser complementado pela estimativa da incerteza da medição. O mensurando, por sua vez, precisa ser definido com completeza o suficiente para estar em acordo com a **exatidão de medição**[31] requerida. Desse modo, se o comprimento de um cilindro de aço precisar ser determinado com grau de exatidão micrométrico, sua definição deveria englobar a temperatura e a pressão na situação de medição, já que essas grandezas têm influência relevante sobre o processo de medição, e consequentemente, sobre o Resultado da Medição. Se o comprimento do mesmo cilindro precisar ser determinado com grau de exatidão milimétrico, as grandezas temperatura e pressão não terão mais influência significativa no processo de medição e, portanto, poderão ser ignoradas na definição do mensurando. O grau de exatidão requerido para medida determina a complexidade do modelo matemático da medição e da incerteza de medição.

4.1. Modelo matemático de medição

Uma medição pode ter um número alto de variáveis de influência dependendo do grau de exatidão pretendido para a medida. Cabe ao responsável pela medição conhecer o processo de medição e avaliar as **grandezas de influência**[32]. Determinadas as grandezas de influência, o passo seguinte é construir o modelo matemático da medição que relaciona o conjunto de medidas executadas, as grandezas de influência e o resultado da medição. A estimativa do mensurando, y, é relacionada às estimativas de outras grandezas $x_1, x_2, \dots, x_n$, por meio de uma relação funcional, f, como mostrado na equação abaixo.

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

onde y é a estimativa do valor do mensurando, $x_1, x_2, \dots, x_n$ são as estimativas das variáveis do modelo, e f é a função que relaciona a estimativa do mensurando e as estimativas das variáveis do modelo. A estimativa y é também chamada de **grandeza de saída**[33] depen-

31. **Exatidão de Medição.** Grau de concordância entre um valor medido e um valor verdadeiro dum mensurando (definição 2.13 do VIM – 2012).

32. **Grandeza de Influência.** Grandeza que, numa medição direta, não afeta a grandeza efetivamente medida, mas afeta a relação entre a indicação e o resultado de medição (definição 2.52 do VIM – 2012).

33. **Grandeza de Saída.** Grandeza cujo valor medido é calculado utilizando-se os valores das grandezas de entrada num modelo de medição (definição 2.51 do VIM – 2012).

dente de x_1, x_2, ... , x_n que são chamadas de **grandezas de entrada**[34]. A relação funcional (f) pode ser escrita explicitamente, determinada experimentalmente ou ainda existir somente como algoritmo a ser resolvido numericamente. Neste texto, f será sempre uma relação funcional que pode ser escrita explicitamente. O termo "*estimativa*" será omitido daqui em diante, mas é importante que o leitor tenha consciência que as grandezas metrológicas são estimativas.

Para garantir a rastreabilidade da medida é importante que o sistema de medição seja rastreado aos padrões do BIPM. Excetuando-se as entidades que têm ou reproduzem **padrões intrínsecos**[35], é fundamental que o sistema de medição seja calibrado por um laboratório credenciado ao sistema metrológico mundial. No Brasil, as calibrações são feitas por laboratórios da Rede Brasileira de Calibração (RBC). Após a calibração, é emitido um certificado de calibração contendo as correções que devem ser aplicadas e as incertezas de calibração do sistema de medição. Lembre-se de que a correção tem por objetivo corrigir erros sistemáticos, enquanto a incerteza relaciona-se com a dúvida no processo de calibração. O modelo matemático de medição mais simples é o que apresenta a correção do instrumento de medição, como única grandeza de influência relevante. Esse modelo pode ser escrito da seguinte forma:

$$y = \bar{I} + C$$

onde $\bar{I}$ é a média das indicações do sistema de medição, C é a correção do sistema de medição e y é o mensurando. Para graus de exatidão maiores, mais variáveis poderão compor o modelo.

Exemplo 01 (parte I). O diâmetro de um eixo foi medido quatro vezes com paquímetro cujo certificado de calibração fornece o valor da correção de 0,180 mm. A média das quatro indicações foi de 10,065 mm. Construa o modelo matemático da medição e determine o valor do mensurando.

Será considerada apenas uma grandeza de influência, a correção do paquímetro, para construção do modelo matemático da medição. Segue abaixo o modelo proposto.

$$\phi_{eixo} = \bar{I} + C_{paquímetro}$$

onde $\bar{I}$ é a média das indicações do paquímetro, $C_{paquímetro}$ é a correção do paquímetro e ϕ_{eixo} é o diâmetro do eixo (mensurando). Substituindo os valores no modelo matemático:

$$\phi_{eixo} = 10{,}065 + 0{,}180 = 10{,}245\ mm$$

Portanto, o valor estimado para o diâmetro do eixo é de 10,245 mm. Note que o resultado obtido é incompleto, pois não foi relatada a incerteza de medição que será abordada posteriormente neste capítulo.

34. **Grandeza de Entrada.** Grandeza que deve ser medida, ou grandeza cujo valor pode ser obtido de outro modo, para calcular um valor medido de um mensurando (definição 2.50 do VIM – 2012).

35. **Padrão Intrínseco.** Padrão baseado em uma propriedade intrínseca e reprodutível dum fenômeno ou duma substância (definição 5.10 do VIM – 2012).

Exemplo 02 (parte I). Em um ambiente com temperatura de (25±1) °C, a massa de uma peça foi medida cinco vezes. Foi usada uma balança cuja correção fornecida no certificado de calibração é de -0,15 g. A balança apresenta deriva térmica 0,008 g/ °C, isto é, é preciso fazer uma correção de 0,008 g para cada acréscimo de um grau Celsius à medida que a temperatura da medição se afasta da temperatura de referência (20 °C). Sabendo que a média das indicações foi de 19,95 g, construa o modelo matemático da medição e determine o valor do mensurando (exemplo adaptado de Albertazzi e de Souza, 2008).

Para construção do modelo matemático da medição, serão consideradas duas grandezas de influência: a correção da balança e a deriva térmica. Segue abaixo o modelo proposto.

$$m_{peça} = \bar{I} + C_{balança} + D_{térmica}$$

onde $\bar{I}$ é a média das indicações da balança, $C_{balança}$ é a correção da balança, $D_{térmica}$ é a deriva térmica da balança e $m_{peça}$ é a massa da peça (mensurando). Como a medição foi feita a 25 °C, a correção devido à deriva térmica é de 0,04 g ($5\ °C \times 0{,}008\ g/\ °C$). Substituindo os valores no modelo matemático:

$$m_{peça} = 19{,}95 - 0{,}15 + 0{,}04 = 19{,}84\ g$$

Portanto, o valor estimado para a massa da peça é de 19,84 g.

Algumas grandezas são determinadas por medições indiretas, isto é, o valor do mensurando é o resultado de operações matemáticas efetuadas a partir de uma ou mais variáveis medidas diretamente. São exemplos a determinação da densidade através da massa e do volume, da corrente elétrica por meio da tensão e da resistência elétrica, da tensão a partir da deformação, entre outros.

Exemplo 03 (parte I). As três arestas diferentes de um paralelepípedo (a, b e c) foram medidas com um paquímetro com correção de 0,04 mm. Cada aresta é medida quatro vezes. As médias das indicações de cada uma das três arestas foram as seguintes: 15,52 mm (a), 10,10 mm (b) e 5,68 mm (c). Construa o modelo matemático para determinar o volume do paralelepípedo e aponte o valor do mensurando.

Será considerada apenas uma grandeza de influência, a correção do paquímetro, para construção do modelo matemático da medição. Segue o modelo proposto formado por quatro equações.

$$L_a = \bar{\bar{I}}_a + C_{paquímetro}$$

$$L_b = \bar{I}_b + C_{paquímetro}$$

$$L_c = \bar{\bar{I}}_c + C_{paquímetro}$$

$$V_{paralelepípedo} = L_a \times L_b \times L_c$$

onde $\bar{I}_a$, $\bar{I}_b$ e $\bar{I}_c$ são as médias das indicações do paquímetro para as arestas a, b e c, respectivamente; $C_{paquímetro}$ é a correção do paquímetro; L_a, L_b e L_c são os comprimentos das arestas a, b e c, respectivamente; e $V_{paralelepípedo}$ é o volume do paralelepípedo (mensurando). Substituindo os valores no modelo matemático:

$$L_a = 15{,}52 + 0{,}04 = 15{,}56\ mm$$

$$L_b = 10{,}10 + 0{,}04 = 10{,}14\ mm$$

$$L_c = 5{,}68 + 0{,}04 = 5{,}72\ mm$$

$$V_{paralelepípedo} = 15{,}56 \times\ 10{,}14\ \times\ 5{,}72 = 902\ mm^3$$

Portanto, o valor estimado para o volume do paralelepípedo é de 902 mm3.

4.2. Modelo matemático de incertezas

O modelo matemático da medição permite estimar o valor do mensurando a partir das estimativas das variáveis de entrada. Similarmente, o modelo matemático de incerteza estima a incerteza padrão de medição. Este último é obtido por meio de uma aproximação de primeira ordem da série de Taylor do modelo de medição. A partir do modelo matemático de medição,

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

onde y é a estimativa do valor do mensurando, $x_1, x_2, \dots, x_n$ são as estimativas das variáveis do modelo, e f é a função que relaciona a estimativa do mensurando e as estimativas das variáveis do modelo. Aplicando uma aproximação de primeira ordem da série de Taylor a y, obtém-se:

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot u(x_i)\right]^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_j}\cdot u(x_i)\cdot u(x_j)\cdot r(x_i, x_j)$$

onde $u(y)$ é a incerteza padrão de medição (do mensurando), y é a grandeza de saída (mensurando), $x_1, x_2, \dots, x_n$ são as grandezas de entrada, f é relação funcional entre a grandeza de saída e as grandezas de entrada, $u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n)$ são as incertezas padrão das grandezas de entrada $x_1, x_2, \dots, x_n$, e $r(x_1, x_j)$ é o coeficiente de correlação entre x_1 e x_j. Essa equação é chamada de **Lei de Propagação da Incerteza**. Como $u(y)$ é resultado da combinação de uma série de incertezas, ela também é conhecida como **incerteza padrão combinada**. Repare que, na equação, há derivadas parciais atreladas a cada uma das incertezas do modelo que são conhecidas como **coeficientes de sensibilidade**.

Na grande maioria dos casos as grandezas de entrada são não correlacionadas, isto é, suas variações são desvinculadas e o coeficiente de correlação entre elas é zero ($r(x_1, x_j) = 0$). A equação anterior perde, assim, seu último termo à direita e pode ser reescrita da seguinte forma.

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot u(x_i)\right]^2$$

onde $u(y)$ é a incerteza padrão de medição (do mensurando), y é a grandeza de saída (mensurando), $x_1, x_2, \dots, x_n$ são as grandezas de entrada, f é relação funcional entre a grandeza de saída e as grandezas de entrada, e $u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n)$ são as incertezas padrão das grandezas de entrada $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Outra situação particular é quando as grandezas de entrada são totalmente correlacionadas, isto é, suas variações são totalmente vinculadas e o coeficiente de correlação entre elas é igual a um ($r(x_I, x_j) = 1$). Nesse caso, a *lei de propagação da incerteza* pode ser reescrita da seguinte forma.

$$u(y) = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot u(x_i) \right|$$

onde $u(y)$ é a incerteza padrão de medição (do mensurando), y é a grandeza de saída (mensurando), $x_1, x_2, \dots, x_n$ são as grandezas de entrada, f é relação funcional entre a grandeza de saída e as grandezas de entrada, e $u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n)$ são as incertezas padrão das grandezas de entrada $x_1, x_2, \dots, x_n$.

A incerteza padrão combinada de uma medição simples pode ser derivada do modelo matemático de medição simples, isto é, aquele que tem como únicas grandezas de influência relevantes a dispersão da medição e a correção do instrumento de medida, descrito da seguinte forma:

$$y = \bar{I} + C$$

onde $\bar{I}$ é a média das indicações do sistema de medida, C é a correção do sistema de medida e y é o mensurando. Considerando-se que as incertezas provindas da média das indicações das medidas e da correção do instrumento são independentes ($r = 0$), o modelo matemático da incerteza pode ser construído da seguinte forma:

$$u^2(y) = \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{I}} \cdot u(\bar{I})\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial C} \cdot u(C)\right]^2 = [1 \cdot u(\bar{I})]^2 + [1 \cdot u(C)]^2 = u^2(\bar{I}) + u^2(C)$$

Repare que a incerteza padrão combinada é proveniente, nesse caso, de duas fontes de incertezas. Uma relacionada diretamente às medições, baseada na análise de uma série de observações, chamada de **incerteza tipo A**. E a outra incerteza, a da correção do sistema de medida, não é derivada diretamente das observações ou medidas efetuadas. Ela deriva de um procedimento de calibração anterior às medições. A esse tipo de incerteza dá-se o nome de **incerteza tipo B**.

Exemplo 01 (parte II). O diâmetro de um eixo foi medido quatro vezes com paquímetro cujo certificado de calibração fornece o valor da correção de 0,180 mm e a incerteza padrão da correção é de 0,010 mm. A média das quatro indicações foi de 10,065 mm e o desvio padrão das indicações foi de 0,002 mm. Construa o modelo matemático da incerteza padrão da medição e determine seu valor.

O modelo matemático da medição é dado por:

$$\phi_{eixo} = \bar{I} + C_{paq}$$

onde $\bar{I}$ é a média das indicações do paquímetro, C_{paq} é a correção do paquímetro e ϕ_{eixo} é o diâmetro do eixo (mensurando). Deriva-se o modelo de incertezas considerando que a correlação entre a incerteza relacionada a média das quatro medidas (desvio padrão da média) e a incerteza da correção do instrumento é nula ($r = 0$). Repare que a incerteza padrão da média das indicações relaciona-se ao desvio padrão da média ($s/\sqrt{n}$) e não ao desvio padrão das medições (s).

$$u^2(\phi_{eixo}) = \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{I}} \cdot u(\bar{I})\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial C_{paq}} \cdot u(C_{paq})\right]^2 = [1 \cdot u(\bar{I})]^2 + [1 \cdot u(C_{paq})]^2 =$$
$$= u^2(\bar{I}) + u^2(C_{paq})$$

$$u(\phi_{eixo}) = \sqrt{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^2 + u^2(C_{paq})} = \sqrt{\left(\frac{0{,}002}{\sqrt{4}}\right)^2 + (0{,}010)^2} \cong 0{,}01005\ mm$$

Repare que combinando as duas incertezas padrões, a da média das medições e a da correção, a contribuição da incerteza da correção foi predominante, nesse caso. A incerteza da medição (IM) será derivada da incerteza padrão combinada calculada, considerando o número de graus de liberdade de cada fonte de incerteza, dando origem ao conceito de Incerteza Expandida que será discutido posteriormente.

Exemplo 02 (parte II). Em um ambiente com temperatura de (25±1) °C, a massa de uma peça foi medida cinco vezes. Foi usada uma balança cuja correção fornecida no certificado de calibração é de -0,15 g com incerteza padrão de 0,01 g. A balança apresenta deriva térmica 0,008 g/°C, isto é, é preciso fazer uma correção de 0,008 g para cada acréscimo de um grau Celsius à medida que a temperatura da medição se fasta da temperatura de referência (20 °C). A incerteza relacionada à deriva térmica pode ser modelada por uma distribuição retangular (com a base do retângulo valendo 0,016 g (2 x 0,008g), já que a incerteza relacionada à temperatura é de ±1 °C). Sabendo que a média das indicações foi de 19,95 g e o desvio padrão foi de 0,05 g, construa o modelo matemático da incerteza padrão da medição e determine seu o valor (exemplo adaptado de Albertazzi e de Souza, 2008).

Serão consideradas duas grandezas de influência, a correção da balança e a deriva térmica, para construção do modelo matemático da medição:

$$m_{peça} = \bar{I} + C_{bal} + D_{tér}$$

onde $\bar{I}$ é a média das indicações da balança, C_{bal} é a correção da balança, $D_{tér}$ é a deriva térmica da balança e é a massa da peça (mensurando). A partir do modelo da medição, considerando que não há correlação ($r = 0$), obtém-se o modelo da incerteza padrão da medição.

$$u^2(m_{peça}) = \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{I}} \cdot u(\bar{I})\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial C_{bal}} \cdot u(C_{bal})\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial D_{tér}} \cdot u(D_{tér})\right]^2 =$$
$$= [1 \cdot u(\bar{I})]^2 + [1 \cdot u(C_{bal})]^2 + [1 \cdot u(D_{tér})]^2$$

$$u(m_{peça}) = \sqrt{\left(\frac{0{,}05}{\sqrt{5}}\right)^2 + (0{,}01)^2 + \left(\frac{0{,}008}{\sqrt{3}}\right)^2} \cong 0{,}025\ g$$

Repare que, combinando as três incertezas padrões (a da média das medições, a da correção e a da deriva térmica), a contribuição da incerteza da média das indicações foi predominante. Como anteriormente, a incerteza da medição (IM) será derivada da incerteza padrão combinada para futura estimativa da Incerteza Expandida.

Exemplo 03 (parte II). As três arestas diferentes de um paralelepípedo (*a*, *b* e *c*) foram medidas com um paquímetro com correção de 0,04 mm e incerteza padrão da correção de 0,01 mm. Cada aresta foi medida quatro vezes. As médias das indicações de cada uma das três arestas foram as seguintes: 15,52 mm (*a*), 10,10 mm (*b*) e 5,68 mm (*c*) e os desvios padrões de cada uma foram 0,06 mm (*a*), 0,04 mm (*b*) e 0,05 mm (*c*). Considere que as medidas de cada lado foram feitas com o mesmo paquímetro e sequencialmente, e que os coeficientes de correlação entre as medições dos três lados foi um ($r = 1$). Construa o modelo matemático para determinar a incerteza padrão do volume do paralelepípedo e aponte seu valor.

Será considerada apenas uma grandeza de influência, a correção do paquímetro, para construção do modelo matemático da medição. O modelo para cálculo do volume do paralelepípedo será o produto dos três comprimentos medidos. Segue abaixo os modelos propostos.

$$L_a = \bar{I}_a + C_{paquímetro}$$

$$L_b = \bar{I}_b + C_{paquímetro}$$

$$L_c = \bar{I}_c + C_{paquímetro}$$

$$V_{paralelepípedo} = L_a \times L_b \times L_c$$

onde $\bar{I}_a$, $\bar{I}_b$ e $\bar{I}_c$ são as médias das indicações do paquímetro para as arestas a, b e c, respectivamente; $C_{paquímetro}$ é a correção do paquímetro; L_a, L_b e L_c são os comprimentos das arestas a, b e c, respectivamente; e $V_{paralelepípedo}$ é o volume do paralelepípedo (mensurando). Primeiro, deriva-se o modelo matemático da incerteza da medição de cada aresta para encontrar a incerteza padrão combinada de cada medição.

$$u^2(L_x) = \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{I}} \cdot u(\bar{I}_x)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial C_{paq}} \cdot u(C_{paq})\right]^2 = [1 \cdot u(\bar{I}_x)]^2 + \left[1 \cdot u(C_{paq})\right]^2 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{u(L_x) = \sqrt{\left(\frac{s_x}{\sqrt{n_x}}\right)^2 + u^2(C_{paq})}}$$

$$u(L_a) = \sqrt{\left(\frac{0{,}06}{\sqrt{4}}\right)^2 + 0{,}01^2} \cong 0{,}032\ mm$$

$$u(L_b) = \sqrt{\left(\frac{0{,}04}{\sqrt{4}}\right)^2 + 0{,}01^2} \cong 0{,}022\ mm$$

$$u(L_c) = \sqrt{\left(\frac{0{,}05}{\sqrt{4}}\right)^2 + 0{,}01^2} \cong 0{,}027\ mm$$

Obtidas as incertezas padrões combinadas das medições de cada aresta do paralelepípedo, a partir do modelo matemático usado para o cálculo do volume do paralelepípedo, deriva-se o modelo matemático da incerteza padrão do volume do paralelepípedo.

$$u(V_{paralelepípedo}) = \left|\frac{\partial f}{\partial L_a} \cdot u(L_a)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial L_b} \cdot u(L_b)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial L_c} \cdot u(L_c)\right|$$

$$u(V_{paralelepípedo}) = |L_b \cdot L_c \cdot u(L_a)| + |L_a \cdot L_c \cdot u(L_b)| + |L_a \cdot L_b \cdot u(L_c)|$$

$$u(V_{paralelepípedo}) = |10{,}14 \cdot 5{,}72 \cdot 0{,}032| + |15{,}56 \cdot 5{,}72 \cdot 0{,}022| +$$
$$+ |15{,}56 \cdot 10{,}14 \cdot 0{,}027| \cong 8\ mm^3$$

Repare que a incerteza da média das indicações das medições das três arestas e as da correção do paquímetro foram primeiramente combinadas para obter as incertezas padrões de cada uma das três arestas, $u(L_a)$, $u(L_b)$ e $u(L_c)$. Posteriormente, estas incertezas padrões foram combinadas para obtenção da incerteza padrão combinada do volume do paralelepípedo, $u(V_{paralelepípedo})$.

4.3. Incerteza Expandida

Como visto, o Resultado da Medição (RM) é composto por dois componentes: um Resultado Base (RB) e uma Incerteza de Medição (IM). Esta última relaciona-se com a dúvida remanescente em torno do resultado base e deve ter um grau de confiança atrelado a ele. Em Metrologia, utiliza-se, nas situações corriqueiras, o grau de confiança de 95,45%. Nesse contexto, surge o conceito de Incerteza Expandida, U. A partir da distribuição t-Student para o grau de confiança de 94,45% utiliza-se o **fator de abrangência (k)**[36] relacionado aos graus de liberdade da incerteza padrão combinada (u_c). Dessa forma, pode-se escrever:

$$U = k \cdot u_c$$

A Incerteza Expandida é a estimativa utilizada para a Incerteza da Medição (IM). Após a estimativa da incerteza padrão combinada, verifica-se o número de graus de liberdade a ela relacionado para uso do fator de abrangência equivalente (Tabela 6). Como a incerteza padrão combinada é estimada a partir de outras incertezas padrões, é necessário estimar também o número de graus de liberdade efetivo (υ_{eff}) por meio da equação de Welch-Satterthwaith:

$$\upsilon_{eff} = \frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^{N} \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot u(x_i)\right)^4}{\upsilon_i}} \text{ com } \upsilon_{eff} \leq \sum_{i=1}^{N} \upsilon_i\ ,$$

onde $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $u(x_i)$ e υ_i são, respectivamente, a função que representa o modelo de medição, as incertezas padrões relacionadas ao processo de medição e seus respectivos graus de liberdade. O número de graus de liberdade das incertezas padrões tipo A associadas a uma grandeza única estimada pela média aritmética de n observações é igual n - 1.

36. O **fator de abrangência** é um termo uso comum em Metrologia e equivale ao parâmetro de *t* da distribuição t-Student.

As incertezas padrões tipo B, por sua vez, não são obtidas a partir observações repetidas, mas sim por julgamento científico. E a menos que esteja explicitado o número de graus de liberdade atrelado a ela, adota-se o número de graus de liberdade infinito (∞).

Exemplo 01 (parte III). O diâmetro de um eixo foi medido quatro vezes com paquímetro cujo certificado de calibração fornece o valor da correção de 0,180 mm e a incerteza padrão da correção é de 0,010 mm. A média das quatro indicações foi de 10,065 mm e o desvio padrão das indicações foi de 0,002 mm. Determine o Resultado da Medição.

O modelo matemático da medição e o modelo de incertezas são dados por:

$$\phi_{eixo} = \bar{I} + C_{paq} \quad \text{e}$$

$$u^2(\phi_{eixo}) = u^2(\bar{I}) + u^2(C_{paq}) \Rightarrow u(\phi_{eixo}) = \sqrt{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^2 + u^2(C_{paq})}$$

onde $\bar{I}$ é a média das indicações do paquímetro, C_{paq} é a correção do paquímetro e ϕ_{eixo} é o diâmetro do eixo (mensurando). Para organizar os dados é usual montar um quadro (como abaixo). Os valores das estimativas de ϕ_{eixo}, $\bar{I}$ e C_{paq} e das incertezas $u(\phi_{eixo})$, $u(\bar{I})$ e $u(C_{paq})$ já foram apresentados nas partes anteriores deste exemplo. O número de graus de liberdade de $u(\bar{I})$ é 3 (*n*-1), pois $\bar{I}$ é a média de 4 (*n*) medições. O número de graus de liberdade de $u(C_{paq})$, incerteza tipo B, é infinito. O número de graus de liberdade de $u(\phi_{eixo})$ pode ser calculado a partir da equação de Welch-Satterthwaith:

$$\upsilon_{eff} = \frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4}{\upsilon_i}} = \frac{0{,}01005^4}{\frac{0{,}001^4}{3} + \frac{0{,}010^4}{\infty}} \cong 30603$$

Pode-se utilizar um quadro para organizar os dados do problema:

Grandeza (x_i)	Estimativa de x_i	Distribuição de Probabilidade	Graus de Liberdade (υ)	Incerteza Padrão $u(x_i)$
$\bar{I}$	10,065 mm	Normal	3	0,001 mm
C_{paq}	0,180 mm	Normal	∞	0,010 mm
ϕ_{eixo}	10,245 mm	Normal	30603	0,010 mm

A partir das informações do quadro, pode-se calcular a incerteza expandida $U(\phi_{eixo})$ com fator de abrangência k = 2 para 30603 graus de liberdade (Tabela 6).

$$U(\phi_{eixo}) = k \cdot u(\phi_{eixo}) = 2 \cdot 0{,}010 = 0{,}02\ mm$$

O Resultado da Medição (RM) do eixo pode agora ser determinado: ***(10,24 ± 0,02) mm***.

Exemplo 02 (parte III). Em um ambiente com temperatura de (25±1) °C, a massa de uma peça foi medida cinco vezes. Foi usada uma balança cuja correção fornecida no certificado de calibração é de -0,15 g. A balança apresenta deriva térmica 0,008 g/°C, ou seja, é preciso fazer uma correção de 0,008 g para cada acréscimo de um grau Celsius à medida que a temperatura da medição se fasta da temperatura de referência (20 °C). A incerteza relacionada à deriva térmica pode ser modelada por uma distribuição retangular. Sabendo que a média das indicações foi de 19,95 g e o desvio padrão foi de 0,05 g, determine o Resultado da Medição (exemplo adaptado de Albertazzi e de Souza, 2008).

Os modelos matemáticos da medição e da incerteza são dados, respectivamente, por:

$$m_{peça} = \bar{I} + C_{bal} + D_{tér} \quad \text{e} \quad u(m_{peça}) = \sqrt{u^2(\bar{I}) + u^2(C_{bal}) + u^2(D_{tér})}$$

onde $\bar{I}$ é a média das indicações da balança, C_{bal} é a correção da balança, $D_{tér}$ é a deriva térmica da balança e $m_{peça}$ é a massa da peça (mensurando). Como no exemplo anterior, os dados serão organizados em um quadro. O número de graus de liberdade de pode ser calculado a partir da equação de Welch-Satterthwaith:

$$\upsilon_{eff} = \frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4}{\upsilon_i}} = \frac{0{,}025^4}{\frac{0{,}022^4}{4} + \frac{0{,}010^4}{\infty} + \frac{0{,}005^4}{\infty}} \cong 6$$

Grandeza (x_i)	Estimativa de x_i	Distribuição de Probabilidade	Graus de Liberdade (υ)	Incerteza Padrão $u(x_i)$
$\bar{I}$	19,95 g	Normal	4	0,022
C_{bal}	-0,15 g	Normal	∞	0,010 g
$D_{tér}$	-0,04 g	Retangular	∞	0,005 g
$m_{peça}$	19,84 g	Normal	6	0,025 g

A partir das informações do quadro, pode-se calcular a incerteza expandida $U(m_{peça})$ com fator de abrangência *k = 2,52* para 6 graus de liberdade (Tabela 6).

$$U(m_{peça}) = k \cdot u(m_{peça}) = 2{,}52 \cdot 0{,}025 = 0{,}06\ g$$

O Resultado da Medição (RM) da massa pode agora ser determinado: ***(19,76 ± 0,06) g***.

Exemplo 03 (parte III). As três arestas diferentes de um paralelepípedo (a, b e c) foram medidas com um paquímetro com correção de 0,04 mm e incerteza padrão da correção de 0,01 mm. Cada aresta é medida quatro vezes. As médias das indicações de cada uma das três arestas foram as seguintes: 15,52 mm (a), 10,10 mm (b) e 5,68 mm (c) e o desvio padrões de cada uma foram 0,06 mm (a), 0,04 mm (b) e 0,05 mm (c). Considere que as medidas de cada lado foram feitas com o mesmo paquímetro e sequencialmente, e que os coeficientes de correlação entre as medições dos três lados foi um ($r = 1$). Determine o Resultado da Medição.

Os modelos matemáticos da medição do volume do paralelepípedo e das incertezas relacionadas são dados por:

$$L_a = \bar{I}_a + C_{paquímetro}$$

$$L_b = \bar{I}_b + C_{paquímetro}$$

$$L_c = \bar{I}_c + C_{paquímetro}$$

$$V_{paralelepípedo} = L_a \times L_b \times L_c$$

$$u^2(L_x) = \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{I}} \cdot u(\bar{I}_x)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial C_{paq}} \cdot u(C_{paq})\right]^2 = [1 \cdot u(\bar{I}_x)]^2 + [1 \cdot u(C_{paq})]^2 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{u(L_x)} = \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{s_x}}{\sqrt{\boldsymbol{n_x}}}\right)^2 + \boldsymbol{u}^2(\boldsymbol{C_{paq}})}$$

$$u(V_{paralelepípedo}) = |L_b \cdot L_c \cdot u(L_a)| + |L_a \cdot L_c \cdot u(L_b)| + |L_a \cdot L_b \cdot u(L_c)|$$

onde $\bar{I}_a$, $\bar{I}_b$ e $\bar{I}_c$ são as médias das indicações do paquímetro para as arestas *a*, *b* e *c*, respectivamente; $C_{paquímetro}$ é a correção do paquímetro; L_a, L_b e L_c são os comprimentos das arestas *a*, *b* e *c*, respectivamente; e $V_{paralelepípedo}$ é o volume do paralelepípedo. Como no exemplo anterior, os dados serão organizados em um quadro. O número de graus de liberdade de $u(V_{paralelepípedo})$ pode ser calculado a partir da equação de Welch-Satterthwaith aplicada primeiro para cada uma das medidas de comprimento:

$$\upsilon_{La} = \frac{\boldsymbol{u}^4(\boldsymbol{L_a})}{\frac{\boldsymbol{u}^4(\bar{I}_a)}{\upsilon_{Ia}} + \frac{\boldsymbol{u}^4(C)}{\upsilon_C}} = \frac{0{,}032^4}{\frac{0{,}03^4}{3} + \frac{0{,}01^4}{\infty}} \cong 3{,}7$$

$$\upsilon_{Lb} = \frac{\boldsymbol{u}^4(\boldsymbol{L_b})}{\frac{\boldsymbol{u}^4(\bar{I}_b)}{\upsilon_{Ib}} + \frac{\boldsymbol{u}^4(C)}{\upsilon_C}} = \frac{0{,}022^4}{\frac{0{,}02^4}{3} + \frac{0{,}01^4}{\infty}} \cong 4{,}7$$

$$\upsilon_{Lc} = \frac{\boldsymbol{u}^4(\boldsymbol{L_c})}{\frac{\boldsymbol{u}^4(\bar{I}_c)}{\upsilon_{Ic}} + \frac{\boldsymbol{u}^4(C)}{\upsilon_C}} = \frac{0{,}027^4}{\frac{0{,}025^4}{3} + \frac{0{,}01^4}{\infty}} \cong 4{,}0$$

Agora é possível calcular o número de graus de liberdade efetivo para o volume do paralelepípedo, utilizando a equação de Welch-Satterthwaith considerando os coeficientes de sensibilidade de cada incerteza:

$$\upsilon_{V_{paralelepípedo}} = \frac{\boldsymbol{u}^4(V_{paralelepípedo})}{\frac{|L_b \cdot L_c \cdot u(L_a)|^4}{\upsilon_{La}} + \frac{|L_a \cdot L_c \cdot u(L_b)|^4}{\upsilon_{Lb}} + \frac{|L_a \cdot L_b \cdot u(L_a)|^4}{\upsilon_{Lc}}} =$$

$$= \frac{8{,}1^4}{\frac{1{,}83^4}{3{,}7} + \frac{1{,}99^4}{4{,}7} + \frac{4{,}25^4}{4{,}0}} \cong 48$$

Neste caso, o número de graus de liberdade efetivo ($\upsilon_{V_{paralelepípedo}}$) ficou superior a soma dos graus de liberdades atrelados as incertezas padrão (3,7 + 4,7 + 4,0 = 12,4). Neste caso usamos o menor valor (12,4) arredondado para o menor inteiro mais próximo.

Grandeza (x_i)	Estimativa de x_i	Distribuição de Probabilidade	Graus de Liberdade (υ)	Incerteza Padrão $u(x_i)$
L_a	15,56 mm	Normal	3,7	0,032 mm
L_b	10,14 mm	Normal	4,7	0,022 mm
L_c	5,72 mm	Normal	4,0	0,027 mm
$V_{paralelepípedo}$	902 mm^3	Normal	12	8,1 mm^3

A partir das informações do quadro, pode-se calcular a incerteza expandida do volume do paralelepípedo, $U(V_{paralelepípedo})$, com fator de abrangência k = 2,23 para 12 graus de liberdade (Tabela 6).

$$U(V_{paralelepípedo}) = k \cdot u(V_{paralelepípedo}) = 2{,}23 \cdot 8{,}1 = 18{,}0\ mm^3$$

O volume do paralelepípedo e sua incerteza expandida podem ser determinados: ***(90 ± 2).10^1 mm^3***.

Referências Bibliográficas

ABNT, INMETRO, SBM. Guia para Expressão da Incerteza de Medição. Terceira edição brasileira em língua portuguesa, Rio de Janeiro, ISBN 85-0700251-X, 120p., 2003.

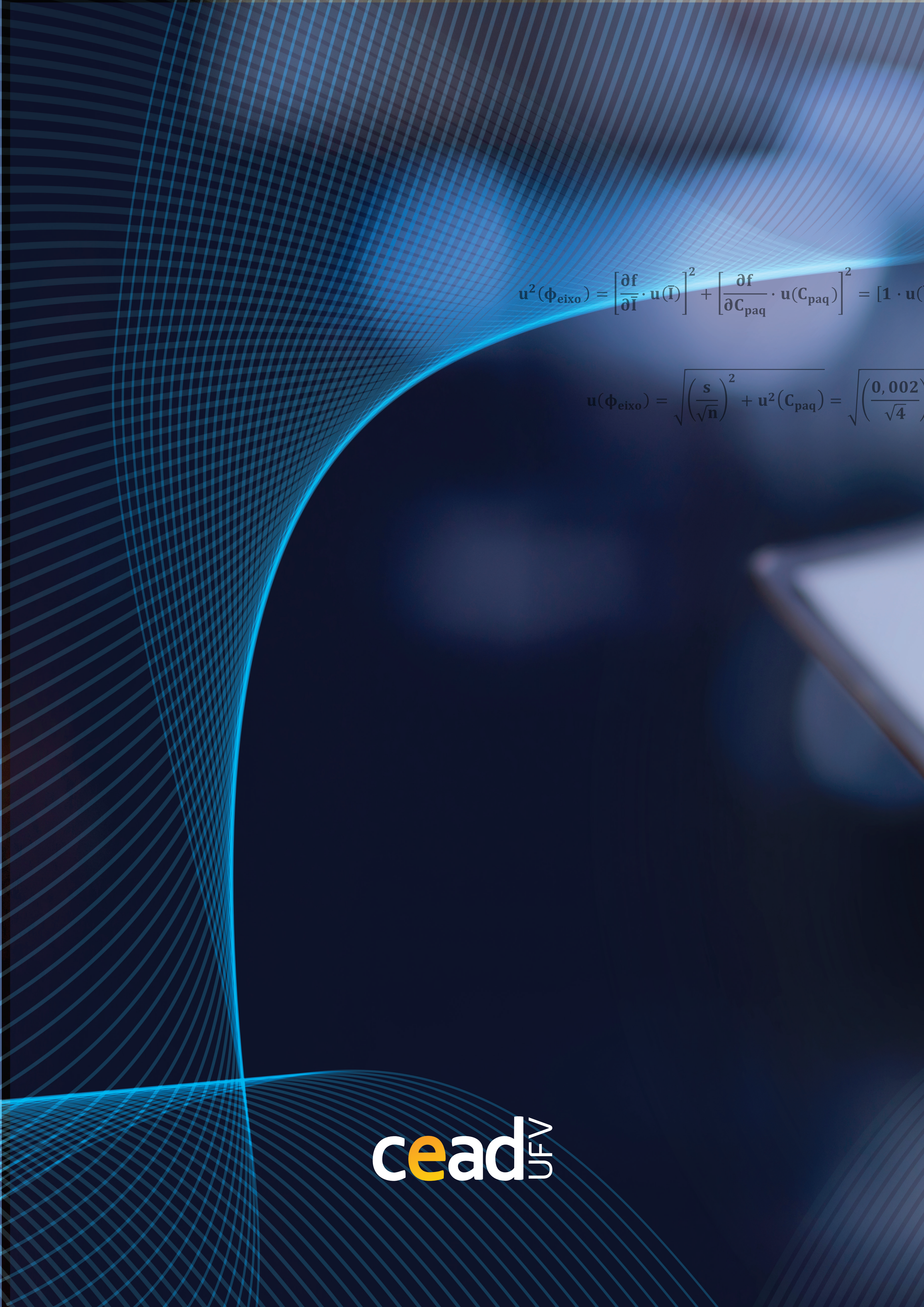
Albertazzi, Armando; Sousa, André Roberto. Fundamentos de Metrologia Científica e Industrial. Editora Manole, ISBN 978-85-204-2116-1, 407p., 2008.

INMETRO. Quadro Geral de Unidades de Medida adotado pelo Brasil. Portaria nº 590, de 02 de dezembro de 2013.

INMETRO. Vocabulário Internacional de Metrologia – VIM. 2012

Link, Walter. Metrologia Mecânica, Expressão da Incerteza de Medição. Programa RH Metrologia, 2a Edição Revisada, 174p. 1999.

Mendes, Alexandre; Rosário, Pedro Paulo. Metrologia & Incerteza de Medição. São Paulo: Editora EPSE, 128p., 2005.



$u^2(\phi_{eixo}) = \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{I}} \cdot u(\bar{I})\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial C_{paq}} \cdot u(C_{paq})\right]^2 = [1 \cdot u($
$u(\phi_{eixo}) = \sqrt{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^2 + u^2(C_{paq})} = \sqrt{\left(\frac{0,002}{\sqrt{4}}\right.}$
cead UFV